Naloge iz metode Monte Carlo 2003/04

Vladimir Batagelj

1. maj 2004 / 24. april 2004

1 Navodila

Izberite eno izmed nalog in jo rešite z uporabo metode Monte Carlo.

Poskusite najti (izpeljite ali poiščite v literaturi) tudi teoretični odgovor in primerjajte oba odgovora. Če je smiselno, rešitev slikovno prikažite.

2 Naloge

2.1 Metanje kovanca

Andrej ima a denot in Bojan ima b denot. Igrata naslednjo igro. Izmenoma mečeta kovanec. Če pade številka, da Andrej Bojanu 1 denoto; sicer pa obratno – da Bojan Andreju 1 denoto. To ponavljata, dokler enemu izmed njiju ne zmanjka denot.

Z metodo Monte Carlo oceni:

1. kolikšna je verjetnost, da Andrej zmaga ?
2. kolikšna je pričakovana dolžina (število metov) igre ?

če je

1. $a = 1$ in $b = 999$;
2. $a = 20$ in $b = 50$.

Kaj pa, če mečeta kocko in da Andrej Bojanu 1 denoto, če pade 6; sicer pa da Bojan Andreju 1 denoto ?

2.2 Tekma

Iz dosedanjih medsebojnih tekem med Rdečimi in Modrimi vemo, da dajo Rdeči v povprečju r golov na tekmo, Modri pa m golov na tekmo.

Z uporabo metode Monte Carlo oceni verjetnost tega:

1. da bodo Rdeči zmagali;
2. da Modri ne bodo celo tekmo niti enkrat v vodstvu (dali več golov kot Rdeči);
3. da eno od moštev v drugi polovici tekme ne bo niti enkrat v vodstvu.

za

1. $r = m = 20$;
2. $r = 25$ in $m = 20$.

2.3 Izbira

Dana je množica n predmetov X_1, X_2, X_3, $\ldots$, X_n. Vsakemu predmetu je pripisana vrednost $v_i = v(X_i)$. Predmeti gredo v slučajnem vrstnem redu mimo nas (npr. hrana na tekočem traku v menzi) – ko je predmet šel enkrat mimo, ga ne moremo več izbrati. Radi bi izbrali čim vrednejši predmet.

Odločili smo se za naslednjo strategijo: mimo bomo spustili prvih $k \cdot n$, $k < 1$ predmetov, si zapomnili najvrednejšega med njimi in nato izbrali prvega, ki bo po vrednosti vsaj tako dober. Če takega predmeta ne bo, bomo izbrali zadnji predmet.

Z uporabo metode Monte Carlo razišči, katera je najboljša vrednost množitelja k (pri različnih vrednostih n) in kolikšna je pričakovana uspešnost izbrane strategije. Za mero uspešnosti uporabi zaporedno številko izbranega predmeta glede na urejenost po vrednostih v padajočem vrstnem redu.

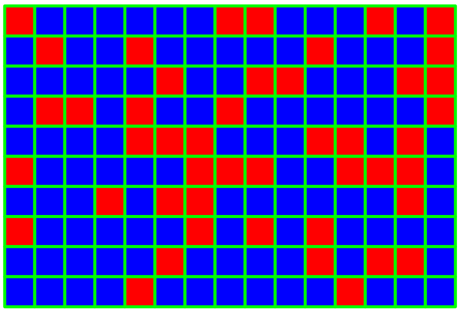
2.4 Tavanja

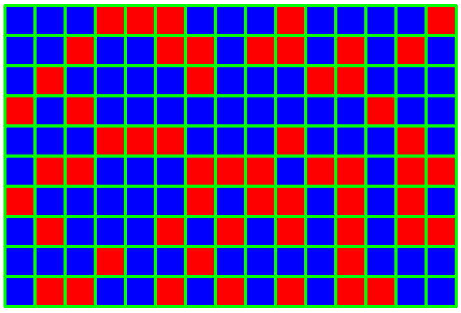
Kvadratna mreža je sestavljena iz $n \times n$ kvadratnih celic. Andrej in Bojan začneta svoji sprehajanji v diagonalno nasprotnih si vogalih. Posamezen korak je premik v slučajno (z enako verjetnostjo) izbrano sosednje vozlišče mreže.

Z uporabo metode Monte Carlo razišči kako se z n spreminja pričakovano število korakov do prvega srečanja – Andrej in Bojan prideta v isto vozlišče.

2.5 Luknje

Na pravokotni plošči $n \times m$ (n vrstic, m stolpcev) je posamezno polje pobarvano z verjetnostjo p z rdečo, sicer pa z modro barvo.





Leva plošča je prehodna – mogoče je priti z leve strani plošče na desno stran po (po stranici) sosednih poljih; desna pa ni.

Z uporabo metode Monte Carlo za $n = 10$ in $m = 15$ ter $m = 25$ razišči, kako se s p spreminja verjetnost tega, da je plošča prehodna.