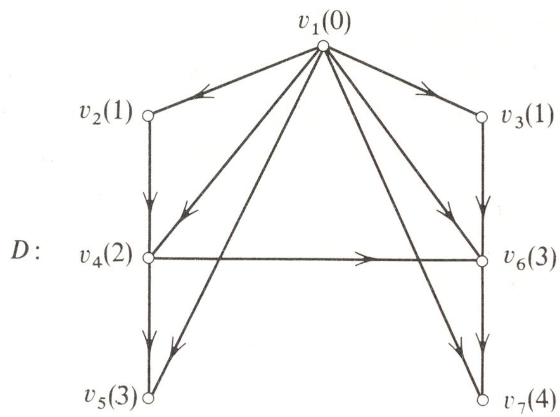


$$N(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a_i \\ 6 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

F. Harary &: Structural models. JW 1965, str. 273

Univerza v Ljubljani
podiplomski študij statistike

Analiza omrežij

6. Matrike in omrežja

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 17. november 2006 / 1. december 2003

Kazalo

Sprehodi po grafu in polkolobarji

Imejmo usmerjen (relacijski) graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{R})$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ in *polkolobar* $(A, +, \cdot, 0, 1)$, kar pomeni, da je:

- $(A, +, 0)$ – Abelov monoid:
  $a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + 0 = a;$
- $(A, \cdot, 1)$ – monoid:
  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

in da operacija $\cdot$ distribuira čez operacijo $+$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{in} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Polkolobar je *zaprt*, če v njem obstaja še enomestna operacija *zaprtja* (ovojnice) $a^\star$, za katero velja

$$a^\star = 1 + a \cdot a^\star = 1 + a^\star \cdot a$$

Polkolobar je *idempotenten*, če velja $a + a = a$.

...Sprehodi po grafu in polkolobarji

Naj bo podana še preslikava $w : \mathcal{R} \to A$, ki vsaki povezavi priredi njeno vrednost.

Preslikavo w lahko razširimo na sprehode in končne množice sprehodov po grafu s predpisi:

- naj bo Z_v ničelni sprehod v točki v, potem je: $w(Z_v) = 1$
- naj bo $S = v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$ sprehod po grafu $\mathcal{G}$, potem je:

$$w(S) = \prod_{i=1}^{k} w((v_{i-1}, v_i))$$

- za prazno množico sprehodov $\emptyset$ velja $w(\emptyset) = 0$
- naj bo $\mathcal{S}$ končna množica sprehodov, potem je

$$w(\mathcal{S}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} w(S)$$

Lastnosti vrednosti sprehodov

Naj bosta S_1 in S_2 sprehoda, tako da je konec sprehoda S_1 enak začetku sprehoda S_2. Tedaj lahko sprehoda staknemo v nov sprehod, ki ga označimo $S_1 \circ S_2$. Zanj velja

$$w(S_1 \circ S_2) = w(S_1) \cdot w(S_2)$$

Za končni množici sprehodov $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ pa velja

$$w(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) + w(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = w(\mathcal{S}_1) + w(\mathcal{S}_2)$$

in v posebnem primeru, ko je $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$: $w(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = w(\mathcal{S}_1) + w(\mathcal{S}_2)$.

Polkolobar je *poln* ntk. vsota definirana tudi za neskončne množice in veljajo posplošena komutativnost za seštevanje, posplošena asociativnost in posplošena distributivnost. Poln kolobar je vselej zaprt za

$$a^\star = \sum_{i \in \mathbb{N}} a^i$$

Zgledi polkolobarjev

Zgled: *Kombinatorični* polkolobar

$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, $+$ seštevanje, $\cdot$ množenje; $w((u,v)) \in \mathbb{N}$ je število načinov, na katere lahko iz točke u pridemo po povezavi v točko v. □

Zgled: Polkolobar *regularnih izrazov*

$(\mathcal{P}(\Sigma^\star), \cup, \cdot, \emptyset, \varepsilon)$, $\Sigma^\star$ – množica končnih nizov nad abecedo Σ, $\cdot$ stikanje nizov, $\varepsilon = \{\lambda\}$; $w((u,v)) \in \Sigma$ oznaka povezave. $w(S)$ – (beseda) zaporedje oznak povezav na sprehodu S. □

Zgled: Polkolobar *najkrajših poti*

$(\mathbb{R}_0^+, \min, +, \infty, 0)$, $w((u,v)) \in \mathbb{R}_0^+$ dolžina povezave, $w(S)$ (prava) dolžina sprehoda S. □

Zgled: *Povezanostni* polkolobar

$(\{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$, $w((u,v)) = 1 \Leftrightarrow (u,v) \in R$, $w(S) = 1$. □

Zgled: *Verjetnostni* polkolobar

$([0,1], +, \cdot, 0, 1)$, $+$ seštevanje, $\cdot$ množenje; $w((u,v)) \in [0,1]$ je verjetnost prehoda iz točke u po povezavi v točko v. □

Množice sprehodov

- $\mathcal{S}^{\star}_{uv}$ – množica vseh sprehodov iz točke u v točko v;
- $\mathcal{S}^{k}_{uv}$ – množica vseh sprehodov dolžine k iz točke u v točko v;
- $\mathcal{S}^{(k)}_{uv}$ – množica vseh sprehodov dolžine največ k iz točke u v točko v;
- $\mathcal{E}_{uv}$ – množica vseh enostavnih sprehodov iz točke u v točko v.

a. $\mathcal{S}^{k}_{uv} \subseteq \mathcal{S}^{(k)}_{uv} \subseteq \mathcal{S}^{\star}_{uv}$

b. $\mathcal{S}^{(k)}_{uv} = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{S}^{i}_{uv} \qquad \mathcal{S}^{\star}_{uv} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}^{k}_{uv}$

c. $k \neq h \iff \mathcal{S}^{k}_{uv} \cap \mathcal{S}^{h}_{uv} = \emptyset$

d. $k \geq |\mathcal{V}| - 1 : \mathcal{E}_{uv} \subseteq \mathcal{S}^{(k)}_{uv}$

e. $w(\mathcal{S}^{(k)}_{uv}) = \sum_{i=0}^{k} w(\mathcal{S}^{i}_{uv})$

Enolična razcepnost

Pri razširitvi vrednosti na sprehode in množice sprehodov nismo uporabili distributivnosti. Kaj nam prinese?

Posplošimo najprej stikanje na množice sprehodov: $\mathcal{S} \circ \emptyset = \emptyset \circ \mathcal{S} = \emptyset$ in

$$\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 = \{S_1 \circ S_2 : S_1 \in \mathcal{S}_1, S_2 \in \mathcal{S}_2\}$$

Za množico sprehodov $\mathcal{S}$ bomo rekli, da je *enolično razcepna* za množici sprehodov $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$, če je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$ in ne obstajajo sprehodi $S_1, S_1' \in \mathcal{S}_1, S_1 \neq S_1'$ in $S_2, S_2' \in \mathcal{S}_2$, tako da bi veljalo $S_1 \circ S_2 = S_1' \circ S_2'$. Z drugimi besedami: vsak sprehod iz $\mathcal{S}$ je mogoče na en sam način zapisati kot stik sprehoda iz $\mathcal{S}_1$ in sprehoda iz $\mathcal{S}_2$.

IZREK 1 *Naj bo množica $\mathcal{S}$ enolično razcepna za $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ in končna ali pa polkolobar poln. Potem velja*

$$w(\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2) = w(\mathcal{S}_1) \cdot w(\mathcal{S}_2)$$

Prehodna matrika

Uredimo množico točk $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, potem lahko preslikavo $w : \mathcal{R} \to A$ predstavimo z matriko, pravimo ji *prehodna matrika* $\mathbf{W} = [w_{ij}]$, katere elementi so določeni z predpisom

$$w_{ij} = \begin{cases} w((v_i, v_j)) & (v_i, v_j) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Množico vseh kvadratnih matrik reda n nad A označimo z $\mathcal{M}_n(A)$. Če v polkolobarju $(A, +, \cdot, 0, 1)$ zahtevamo, da velja še

$$\forall a \in A : a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

je tudi struktura $(\mathcal{M}_n(A), +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ polkolobar, pri čemer sta operaciji nad matrikami definirani na običajni način:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad \text{in} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}]$$

Potence prehodne matrike

Ničelna matrika $\mathbf{0}$ ima vse elemente enake 0, enotna matrika $\mathbf{1}$ pa le diagonalne enake 1. če je osnovni polkolobar poln, je poln tudi matrični polkolobar. Zaradi asociativnosti je enolično določena k-ta potenca poljubne kvadratne matrike nad A. Za k-to potenco prehodne matrike $\mathbf{W}$ velja:

IZREK 2 *Element w_{ij}^k k-te potence $\mathbf{W}^k$ prehodne matrike $\mathbf{W}$ je enak vrednosti vseh sprehodov dolžine k iz točke v_i v točko v_j.*

Dokaz: Pozor, w_{ij}^k **ni** k-ta potenca w_{ij} !!! Izrek bomo dokazali z indukcijo. Za $k = 0$ in $k = 1$ očitno velja. Predpostavimo, da velja za k in pokažimo, da tedaj velja tudi za $k + 1$.

Označimo s K množico indeksov vseh tistih točk, ki jih je mogoče doseči iz točke v_i po sprehodu dolžine k in je hkrati mogoče priti iz njih po povezavi v točko v_j. Če je $K = \emptyset$, je tudi $\mathcal{S}_{ij}^{k+1} = \emptyset$ in zato $w_{ij}^{k+1} = 0$. Naj bo sedaj $K \neq \emptyset$. Potem zaradi enolične razcepnosti sprehoda dolžine $k + 1$ na sprehod dolžine k in sprehod dolžine 1 in razbitja množice sprehodov glede na točko, iz katere pridemo v v_j velja:

…potence prehodne matrike

$$
\begin{aligned}
w(\mathcal{S}_{ij}^{k+1}) &= \sum_{t \in K} w(\mathcal{S}_{i(t)j}^{k+1}) = \sum_{t \in K} w(\mathcal{S}_{it}^{k} \circ \mathcal{S}_{tj}^{1}) = \\
&= \sum_{t \in K} w(\mathcal{S}_{it}^{k}) \cdot w(\mathcal{S}_{tj}^{1}) = \sum_{t \in K} w_{it}^{k} \cdot w_{tj} = \sum_{t=1}^{n} w_{it}^{k} \cdot w_{tj} = w_{ij}^{k+1}
\end{aligned}
$$

S tem je po načelu popolne indukcije izrek dokazan. □

Za prehodno matriko $\mathbf{W}$ acikličnega grafa velja $\exists k_0 < n : \forall k \geq k_0 : \mathbf{W}^k = \mathbf{0}$. Pri tem je k_0 dolžina najdaljšega sprehoda po grafu.

$$\mathbf{A}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{A}^i$$

Velja $w_{ij}^{(k)} = w(\mathcal{S}_{ij}^{(k)})$. V idempotentnih polkolobarjih je $\mathbf{A}^{(k)} = (\mathbf{1} + \mathbf{A})^k$.

Zaprtje (ovojnica) prehodne matrike

Kaj pa, če je množica sprehodov neskončna, kot je včasih $\mathcal{S}^{\star}_{ij}$? Tedaj stvari gladko tečejo, če je polkolobar poln.

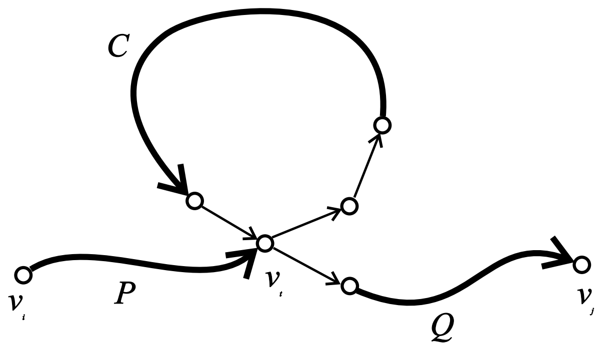
Poglejmo si primer, ko v polkolobarju velja absorpcijski zakon:

$$\forall a, b, c \in A : a \cdot b + a \cdot c \cdot b = a \cdot b$$

Zaradi distributivnosti zadošča že zahteva:

$$\forall c \in A : 1 + c = 1$$

Neenostaven sprehod



Recimo, da v $\mathcal{S}_{ij}^{(k)}$ obstaja neenostavni sprehod S. Ker ni enostaven, se vsaj ena točka, naj bo to v_t, pojavi večkrat. Del sprehoda med prvo in zadnjo pojavitvijo točke v_t v S je obhod. Označimo ga s C. Tedaj lahko S zapišemo v obliki $S = P \circ C \circ Q$. Toda tudi $P \circ Q$ je sprehod. Poiščimo skupno vrednost obeh sprehodov:

$$w(\{P\circ Q, P\circ C\circ Q\}) = w(P\circ Q) + w(P\circ C\circ Q) =$$
$$= w(P)\cdot w(Q) + w(P)\cdot w(C)\cdot w(Q) =$$
$$= w(P)\cdot w(Q) = w(P\circ Q)$$

Torej je za vse dovolj velike k

$$w(\mathcal{S}_{ij}^{(k)}) = w(\mathcal{E}_{ij}) \qquad \text{in zato tudi} \qquad w(\mathcal{S}_{ij}^{\star}) = w(\mathcal{E}_{ij})$$

Enakost velja tudi v primeru, ko je $\mathcal{S}_{ij}^{\star} = \emptyset$.

Izračun zaprtja v polkolobarjih z absorpcijo

Ker je množica točk V končna, je končna tudi množica $\mathcal{E}_{ij}$ in potemtakem lahko vrednost $w(\mathcal{S}^{\star}_{ij})$ izračunamo. Na primer tako, da upoštevamo, da je za vse dovolj velike k:

$$\mathbf{W}^{\star} = \mathbf{W}^{(k)} = (\mathbf{1} + \mathbf{W})^{k}$$

Če izberemo k oblike 2^s, lahko z računanjem potenc $(\mathbf{1} + \mathbf{W})^{2^i}, i = 1, .., s$ postopek pohitrimo. Izkazalo pa se je, da to ni najučinkovitejša pot.

Kleene, Warshall, Floyd in Roy so prispevali vsak svoj delež k postopku, katerega je nazadnje izpopolnil Fletcher.

Fletcherjev postopek

Pri Fletcherjevem postopku predpostavljamo, da je polkolobar poln. Enomestno operacijo zaprtja * definiramo s predpisom: $a^\star = \sum_{i=0}^{\infty} a^i$. Ne zahtevamo absorpcije ali idempotence.

Naj bo $\mathbf{C}_0 = \mathbf{W}$, potem lahko Fletcherjev postopek zapišemo takole:

for $k := 1$ **to** n **do begin**
    for $i := 1$ **to** n **do for** $j := 1$ **to** n **do**
        $\mathbf{C}_k[i,j] := \mathbf{C}_{k-1}[i,j] + \mathbf{C}_{k-1}[i,k] \cdot \mathbf{C}_{k-1}[k,k]^\star \cdot \mathbf{C}_{k-1}[k,j]$;
    $\mathbf{C}_k[k,k] := 1 + \mathbf{C}_k[k,k]$
end;

$\mathbf{C}_k[i,j]$ je vrednost vseh sprehodov iz točke v_i v točko v_j, ki gredo skozi točke z indeksom največ k. Torej je končna matrika $\mathbf{C}_n = \mathbf{W}^\star$. Pravilnost postopka pokažemo z indukcijo po k. Pri programiranju postopka seveda shajamo že z dvema matrikama; oziroma eno samo, če je seštevanje idempotentno. V primeru, ko velja tudi absorpcijski zakon se postopek še poenostavi, saj je $a^\star = 1$.

Vmesnost in geodezični polkolobar

Če poznamo matriki $[d_{u,v}]$ in $[g_{u,v}]$ lahko določimo tudi $g_{u,v}(t)$ takole:

$$g_{u,v}(t) = \begin{cases} g_{u,t} \cdot g_{t,v} & d_{u,t} + d_{t,v} = d_{u,v} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Za hkratni izračun obeh matrik $[(d_{u,v}, g_{u,v})]$ lahko uporabimo Fletcherjev postopek nad *geodezičnim* polkolobarjem, ki ga uporabimo na sestavljeni matriki

$$(d, n)_{u,v} = \begin{cases} (1, 1) & (u, v) \in \mathcal{R} \\ (\infty, 0) & (u, v) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

...Vmesnost in geodezični polkolobar

V množici $A = (\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}) \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ vpeljemo operaciji: *seštevanje*:

$$(a, i) \oplus (b, j) = (\min(a, b), \begin{cases} i & a < b \\ i + j & a = b \\ j & a > b \end{cases})$$

in *množenje*: $(a, i) \odot (b, j) = (a + b, i \cdot j)$.

Dobljena struktura je poln in zaprt polkolobar

$$(a, i)^\star = \begin{cases} (0, \infty) & a = 0, i \neq 0 \\ (0, 1) & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračun vmesnosti v R-ju

```
mat.geodesics <- function(m)
{ n <- nrow(m)
  md <- m; md[m==0] <- Inf;  mc <- m; mc[m>0] <- 1
  for (k in 1:n) { for (u in 1:n){ for (v in 1:n){
    dst <- md[u,k] + md[k,v]
    if (md[u,v] >= dst) {
      cnt <- mc[u,k]*mc[k,v];
      if (md[u,v] == dst) {mc[u,v] <- mc[u,v] + cnt }
      else  {md[u,v] <- dst; mc[u,v] <- cnt }
    }
  }}}
  list(dis=md,cnt=mc)
}

vec.betweeness <- function(m)
{ mt <- mat.geodesics(m);  attach(mt)
  n <- nrow(m); bw <- rep(0,n)
  for (v in 1:n) {
    b <- 0
    for (u in 1:n) {for (w in 1:n) {
      if ((cnt[u,w] > 0) && (u != w) && (u != v) && (v != w) &&
            ((dis[u,v] + dis[v,w]) == dis[u,w]))
        {b <- b + cnt[u,v]*cnt[v,w] / cnt[u,w]}
    }}
    bw[v] <- b/((n-1)*(n-2))
  }
  bw
}
```

”Se nekaj operacij z matrikami

Transponirana matrika $\mathbf{A}^T$ matrike $\mathbf{A}$ je določena z $a_{ij}^T = a_{ji}$. Velja

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

Matrika $\mathbf{A}$ je *simetrična* ntk. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Za realno matriko $\mathbf{A}$ je prirejena *dvojiška* matrika $b(\mathbf{A}) = [b_{ij}]$ določena z

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & a_{ij} = 0 \\ 1 & \text{sicer} \end{cases}$$

Urejenostno podobne matrike

Permutacijska matrika $\mathbf{P}$ določena s permutacijo π je

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \pi(i) = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ sta *urejenostno podobni*, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ntk. obstaja permutacijska matrika $\mathbf{P}$ taka, da je $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T$.

Urejenostna podobnost matrik je enakovrednost.

Matriki izomorfnih grafov sta si urejenostno podobni.

Množenje matrike in vektorja

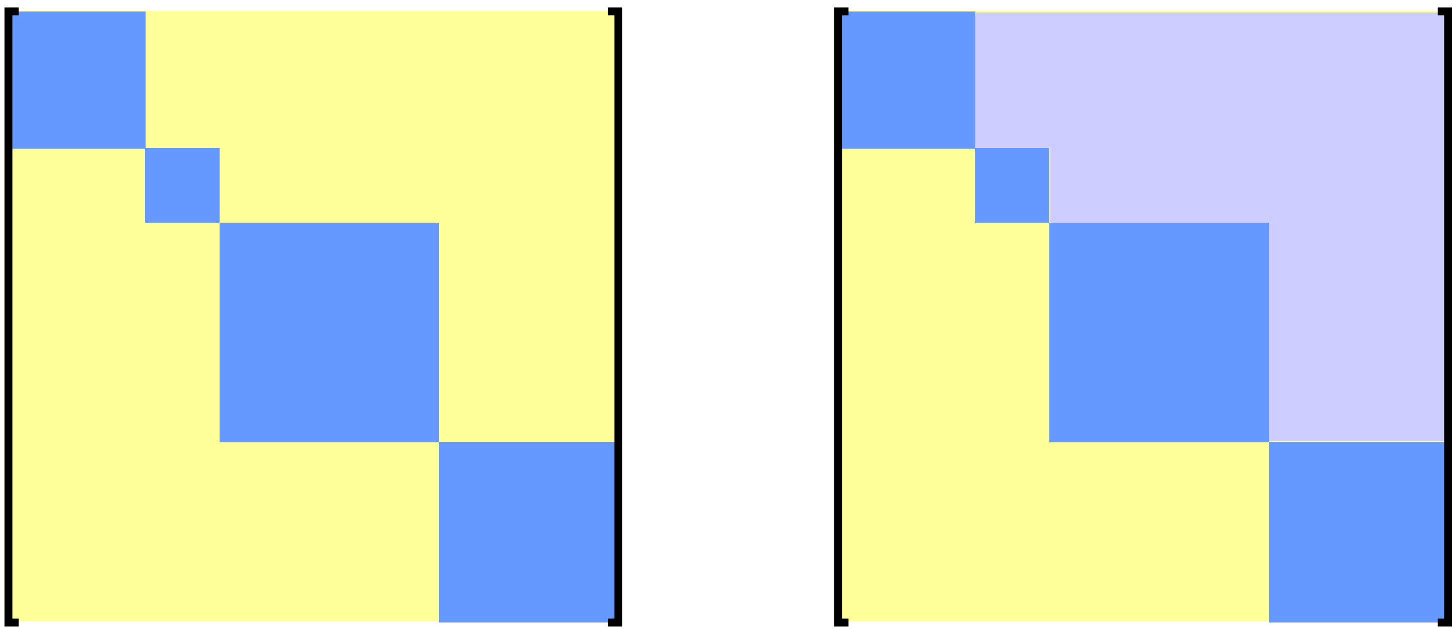
Naj bo $\mathbf{S}$ matrika vredosti sprehodov, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ dana množica in $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$ vektor-vrstica pripadnosti – $p_i = 1$ ntk. $v_i \in \mathcal{U}$. Tedaj je $(\mathbf{pS})_j$ enak vrednosti vseh sprehodov (iz $\mathbf{S}$) iz U v točko v_j.

$$(\mathbf{pS})_j = \sum_{v_i \in U} S_{ij}$$

Naj bo $\mathbf{e}_i$ vektor-vrstica z $e_i = 1$ in $e_j = 0$, $j \neq i$. Tedaj je nad kombinatoričnim polkolobarjem

$(\mathbf{e}_i \mathbf{W}^{\mathbf{k}})_j =$ število različnih poti dolžine k iz v_i v v_j.

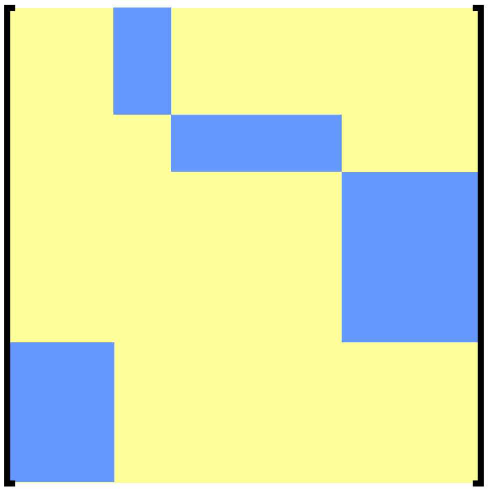
Zgradba (matrik) usmerjenih grafov

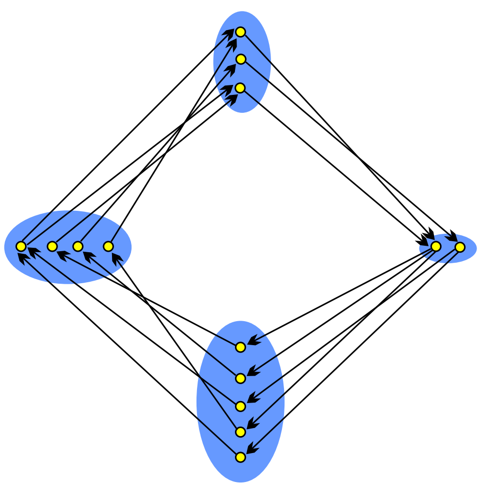


$b((\mathbf{W} + \mathbf{W}^T))^\star$ – šibke komponente – diagonalni bloki

$b(\mathbf{W})^\star$ – krepke komponente – krepka skrčitev – ureditev skupin – diagonalni in naddiagonalni bloki

...zgradba (matrik) usmerjenih grafov





Notranja zgradba krepke komponente – naj bo d največji skupni delitelj dolžin obhodov v krepki komponenti.

Komponenta je *enostavna*, če je $d = 1$; sicer je *periodična* s periodo d.

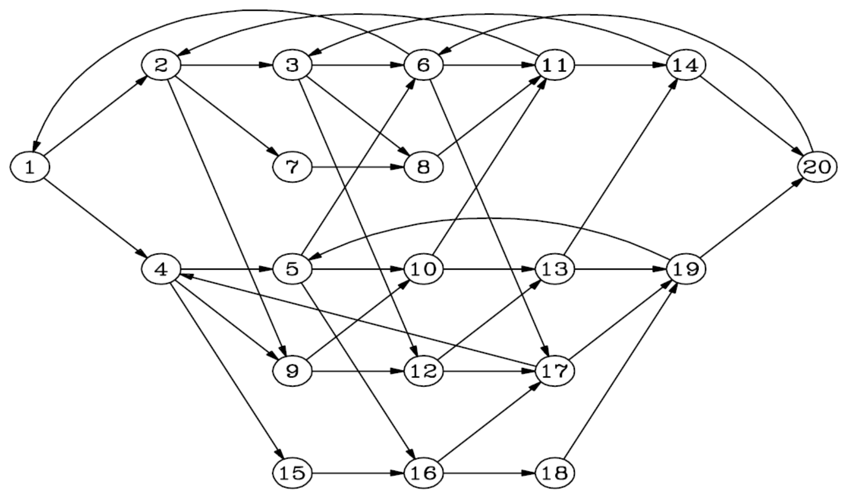
Množico točk $\mathcal{V}$ krepko povezanega usmerjenega grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{R})$ je mogoče razbiti na d skupin $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_d$, tako da za vsako povezavo $(u, v) \in R$ velja $u \in \mathcal{V}_i \Rightarrow v \in \mathcal{V}_{(i \bmod d)+1}$.

Računanje z matrikami grafov v R-ju

Zbirka ukazov

```
mat.perm(m,p)
per.invert(p)
vec.unit(n)
vec.sel(n,p)
mat.bin(m)
mat.power(m,k)
mat.sumpow(m,k)
mat.close.bin(m)
mat.dist(m)
mat.paths(m)
vec.path(m,u,v)
mat.rnd.ER(n,p)
mat.save.net(fnet,m)
mat.prob(m)
```

. . . računanje z matrikami grafov v R-ju



Bonhourejev periodični graf. Pajek

```
p <- c(1,11,13,17,18,2,4,14,19,3,5,7,9,15,20,6,8,10,12,16)
a <- mat.perm(n7,p)
mat.bin(mat.power(a,10))
mat.bin(mat.power(a,11))
mat.bin(mat.power(a,4))
mat.bin(mat.power(a,8))
```

Obratna matrika

Kvadratna matrika $\mathbf{A}$ je *neizrojena*, če je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Za neizrojeno matriko $\mathbf{A}$ vselej obstaja natanko določena matrika $\mathbf{B}$ taka, da je $\mathbf{AB} = \mathbf{1}$. Pravimo ji *obratna* matrika matrike $\mathbf{A}$ in označimo $\mathbf{A}^{-1}$. Velja

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

V R-ju dobimo obratno matriko s funkcijo `solve(A)`.

Lastne vrednosti

Naj za kvadratno matriko $\mathbf{A}$ obstajata število λ in vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tako da velja

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

tedaj je λ *lastna vrednost* in $\mathbf{x}$ *lastni vektor* matrike $\mathbf{A}$.

Lastni vektor je določen do množenja s konstanto natančno. Običajno to konstanto izberemo tako, da je $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = 1$.

Vse lastne vrednosti matrike so rešitve enačbe $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0$. V splošnem so lahko tudi kompleksna števila.

Naj bo $\mathbf{T}$ neizrojena kvadratna matrika in $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, tedaj imata $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ iste lastne vrednosti.

. . . lastne vrednosti

Naj bo $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$ in $\mathbf{V} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n]$ matrika sestavljena iz ustreznih lastnih vektorjev. Tedaj je

$$\mathbf{AV} = \mathbf{V\Lambda}$$

Če so vse vrednosti različne, so pripadajoči lastni vektorji neodvisni in zato matrika $\mathbf{V}$ neizrojena. To da

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV} = \mathbf{\Lambda} \qquad \text{oziroma} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^{-1}$$

Naj bo $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{\Lambda}$, tedaj je tudi $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}(\lambda_i^k)$. Torej imata matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{A}^k$ iste lastne vektorje.

Zvezo $\mathbf{A}^k = \mathbf{T\Lambda}^k\mathbf{T}^{-1}$ lahko uporabimo za učinkovit izračun potenc $\mathbf{A}^k$.

…lastne vrednosti

Poglejmo sedaj $\mathbf{A}^\star = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^\star\mathbf{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^k = \mathrm{diag}(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k)$$

Če so vsi $|\lambda_i| < 1$ je torej

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^\star\mathbf{T} = \mathrm{diag}(\frac{1}{1-\lambda_i}) \qquad \text{oziroma} \qquad \mathbf{A}^\star = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$$

Lastni vektorji-vrstice zadoščajo zvezi $\mathbf{yA} = \lambda\mathbf{y}$. Označimo z $\mathbf{U}$ matriko lastnih vrstic. Tedaj je

$$\mathbf{UA} = \mathbf{\Lambda U} \qquad \text{oziroma} \qquad \mathbf{UAU}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$$

torej, če izberemo ustrezne množitelje, velja

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1} \qquad \text{oziroma} \qquad \mathbf{UV} = \mathbf{1}$$

Lastne vrednosti simetričnih matrik

Vse lastne vrednosti realne simetrične matrike so realne.

Lastni vektorji so *ortogonalni* – za vsak par lastnih vektorjev $\mathbf{x} \neq c\mathbf{y}$ velja $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$.

Matrika $\mathbf{T}$ je *ortogonalna*, če je $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$.

Za simetrično realno matriko $\mathbf{A}$ je $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$, kjer je $\mathbf{V}$ ortogonalna matrika in $\mathbf{\Lambda}$ realna matrika.

Polpozitivne matrike

Matrika $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je

- *pozitivna*, če $\forall i, j : a_{ij} > 0$
- *polpozitivna*, če $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0} : (\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0} \wedge \mathbf{x}^T\mathbf{A} > \mathbf{0})$

Polpozitivno matriko sestavljajo nenegativna števila in v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu je vsaj eno neničelno število. Vsaka pozitivna matrika je tudi polpozitivna.

Naj bo $\mathbf{A}$ polpozitivna matrika. Tedaj ima lastno vrednost (*Frobenius-Perronova*) λ^* in pripadajoči lastni vektor $\mathbf{x}^*$, za katera velja:

a. lastna vrednost λ^* je realna in nenegativna;
b. druge lastne vrednosti po absolutni vrednosti ne presegajo λ^*;
c. vektor $\mathbf{x}^*$ je nenegativen;
d. za vse $\mu > \lambda^*$ je matrika $\mu\mathbf{1} - \mathbf{A}$ neizrojena in matrika $(\mu\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ polpozitivna.

... polpozitivne matrike

Če je matrika $\mathbf{A}$ tudi nerazcepna (graf je krepko povezan), velja:

a'. lastna vrednost λ^* je pozitivna in enojna;

b'. če je $\mathbf{A}$ pozitivna, so druge lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od λ^*;

c'. vektor $\mathbf{x}^*$ je pozitiven;

d'. matrika $(\mu\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ je pozitivna.

e. vektor $\mathbf{x}^*$ je edini nenegativni lastni vektor;

f. naj bo $s = \min_i \sum_j a_{ij}$ in $S = \max_i \sum_j a_{ij}$. Tedaj je ali $s < \lambda^* < S$ ali pa je $\lambda^* = s = S$. Podobno velja za stolpce.

g. naj bosta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ istega reda, nerazcepni in $\mathbf{A} - \mathbf{B} > \mathbf{0}$, teda je $\lambda^*_A > \lambda^*_B$;

h. množica lastnih vrednosti matrike $\mathbf{A}$ je unija množic lastnih vrednosti matrik njenih krepkih komponent.

Markovske verige

Kvadratna matrika $\mathbf{P}$ je *verjetnostna* (stohastična) ntk. je nenegativna in so vse vrstične vsote enake 1. Produkt verjetnostnih matrik je verjetnostna matrika. Potenca verjetnostne matrike je verjetnostna matrika.

Markovska veriga ima za prehodno matriko verjetnostno matriko. Točkam običajno rečemo stanja. Krepka komponenta Mv je *končna*, če iz nje ne vodi nobena povezava. Glede na graf matrike se stanja Mv delijo na

- *minljiva* – ne pripadajo končnim krepkim komponentam
- *ponavljajoča* – pripadajo končnim krepkim komponentam. Naprej se delijo na *stalna* ($d = 1$) in *periodična* ($d > 1$).

Element p_{ij}^k matrike $\mathbf{P}^k$ je enak verjetnosti, da se po k korakih nahajamo v stanju v_j, če smo začeli v stanju v_i.

Naj bo $\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^k$. Tedaj je $\mathbf{p}(k)_i$ enak verjetnosti, da se po k korakih nahajamo v stanju v_i, če smo začetek izbrali glede na porazdelitev $\mathbf{p}(0)$.

Regularne Markovske verige

Markovska veriga je *regularna* ntk. je njen graf krepko povezan in so vsa njena stanja stalna.

Potenca $\mathbf{P}^k$ z rastočim k teži k matriki $\mathbf{W}$, ki ima vse vrstice enake porazdelitvenemu vektorju $\mathbf{w}$, ki zadošča enačbi $\mathbf{wP} = \mathbf{w}$.

Vektor $\mathbf{w}$ je pozitiven. Velja $\mathbf{PW} = \mathbf{WP} = \mathbf{W}$. Ne glede na izbiro $\mathbf{p}(0)$ vektorji $\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}^k$ gredo proti vektorju $\mathbf{w}$.

Matrično zaporedje $\mathbf{A}_i$ je *seštevno po Cesaru* ntk. vrsta $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i$ gre proti neki matriki $\mathbf{A}$.

Za prehodne matrike periodičnih krepko povezanih Markovskih verig veljajo v smislu seštevnosti po Cesaru enake lastnosti, kot veljajo za regularne.

Ponavljajoče Markovske verige

Temeljna matrika ponavljajoče Markovske verige je

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{1} - (\mathbf{P} - \mathbf{W}))^{-1}$$

Matrika $\mathbf{Z}$ vselej obstaja in velja še (za periodične, po Cesaru)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{P}^i - \mathbf{W})$$

Uporaba temeljne matrike

Naj bo $\mathbf{E} = [e_{ij}]$ matrika, kjer je:

- $e_{ij}, i \neq j$ enak pričakovanemu številu korakov preden prvič prispemo v stanje v_j, če smo začeli v stanju v_i;
- e_{ii} enak pričakovanemu številu korakov preden se prvič spet vrnemo v stanje v_i;

Pravimo ji *matrika povprečnega prvega prehoda*. Velja

$$\mathbf{E} = (\mathbf{1} - \mathbf{Z} + \mathbf{J}\,\mathrm{diag}(\mathbf{Z}))\,\mathrm{diag}(\frac{1}{w_i})$$

kjer je $\mathbf{J}$ kvadratna matrika iz samih enic. V posebnem primeru je $e_{ii} = \frac{1}{w_i}$.

Uporaba temeljne matrike / primer v R-ju

```
# summer weather
# F.S. Roberts: Discrete mathematical models, p.267
S <- c( 1/3, 1/2, 1/6,
        1/2, 1/3, 1/6,
        1/3, 1/3, 1/3 )
n <- c('hot','moderate','cool')
S <- matrix(nrow=3,byrow=T,dimnames=list(n,n),data=S)

n <- nrow(S)
A <- t(S)-diag(n); A[n,] <- rep(1,n)
b <- rep(0,n); b[n] <- 1
w <- solve(A,b)
W <- matrix(nrow=n,ncol=n,byrow=T,w,dimnames=dimnames(S))
Z <- solve(diag(n) - (S - W))
E <- (diag(n) - Z + matrix(nrow=n,ncol=n,byrow=T,diag(Z)))
     %*% diag(1/w)
dimnames(E) <- dimnames(S)
```

Markovske verige z minljivimi stanji

Končne krepke komponente v Markovski verigi so *absorpcijske* – ko vanjo zaidemo, jo ne moremo več zapustiti. Če skrčimo absorpcijske komponente in prehodno matriko $\mathbf{P}$ skrčene verige ustrezno preuredimo, jo lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

Prvemu delu ustrezajo absorpcijska stanja. Za njene potence velja:

$$\mathbf{P}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_k & \mathbf{Q}^k \end{bmatrix}$$

Zaporedje $\mathbf{Q}^k \to \mathbf{0}$ z rastočim k. Vselej obstaja $\mathbf{N} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Q}^i = (\mathbf{1} - \mathbf{Q})^{-1}$. Element n_{ij} je pričakovani 'čas' zadrževanja v stanju v_j, če začnemo v stanju v_i.

Element b_{ij} matrike $\mathbf{B} = \mathbf{NR}$ pa je enak verjetnosti, da bomo poniknili v absorpcijskem stanju v_j, če začnemo v minljivem stanju v_i.

Markovske verige z minljivimi stanji / primer v R-ju

```
# gambler's ruin
# F.S. Roberts: Discrete mathematical models, p.268
p <- 1/3
G <- c( 1 , 0 , 0 , 0, 0,
       1-p, 0 , p , 0, 0,
        0 ,1-p, 0 , p, 0,
        0 , 0 ,1-p, 0, p,
        0 , 0 , 0 , 0, 1 )
n <- c('$0','$1','$2','$3','$4')
G <- matrix(nrow=5,byrow=T,dimnames=list(n,n),data=G)

n <- 5; m <- 2
G <- mat.perm(G,c(1,5,2,3,4))
Q <- G[(m+1):n,(m+1):n]
N <- solve(diag(n-m)-Q)
R <- G[(m+1):n,1:m]
B <- N %*% R
```

Viri

Batagelj, V.: *Semirings for Social Networks Analysis*. Journal of Mathematical Sociology, **19**(1994)1, 53-68.

Kemeny, J.G., Snell, J.L.: *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, New Jersey, 1960. Amazon.

Kemeny, J.G., Snell, J.L., Thompson, G.L.: *Introduction to Finite Mathematics*. Introduction to Finite Mathematics.

Roberts, F.S.: *Discrete Mathematical Models*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976. Amazon.