

L. Kreml, MPI.

**Univerza v Ljubljani
podiplomski študij statistike**

**Analiza omrežij
5. Zgradba omrežij:
otoki in gruče**

Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

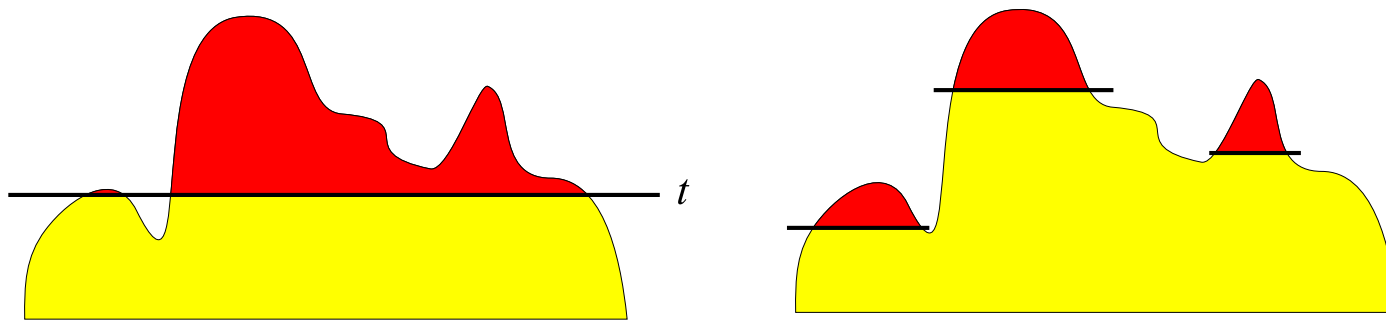
Ljubljana, 22. november 2006 / 24. november 2003

Kazalo

1	Otoki	1
16	Gruče	16
17	Sredice in posplošene sredice	17
22	Posplošene sredice	22

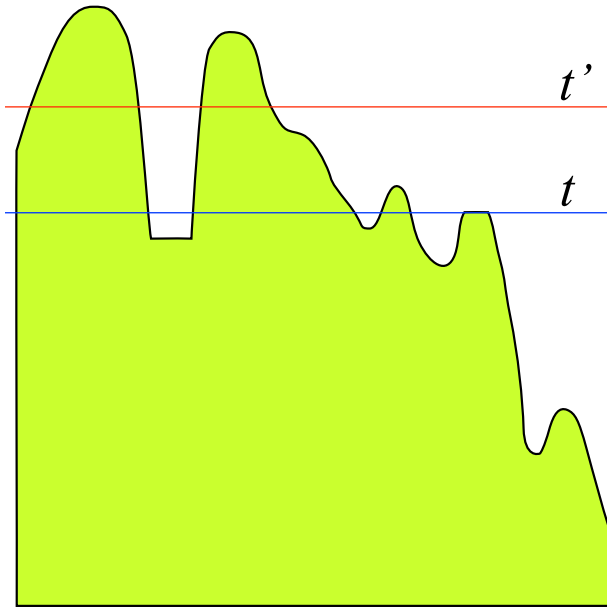
Otoki

Če dano lastnost/utež točk/povezav predstavimo kot njihovo višino, nam naše omrežje določa nekakšno pokrajino s hribi in dolinami. Če to pokrajino potopimo v vodo do izbrane višine, dobimo *otoke*. S spreminjanjem višine vode dobivamo različne otoke. V uprabah nas običajno zanimajo ne preveliki in ne premajhni otoki – le otoki velikosti med izbranima k in K . Postopek 'otoki' začne s pokrajino popolnoma potopljeno v vodo. Nato znižujemo višino, dokler se ne pojavi otok prave velikosti ...



Otoki so zelo splošen in učinkovit postopek za določanje 'pomembnih' podomrežij v danem omrežju.

... otoki



V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, p)$, $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo *pravi točkovni otok* skupino točk $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so točke v skupini 'višje' od sosednjih točk

$$\max_{u \in N(\mathcal{C})} p(u) < \min_{v \in \mathcal{C}} p(v)$$

V omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L}, w)$, $w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo *pravi povezavni otok* skupino točk $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$, ki poraja povezan podgraf in so točke v skupini 'močnejše' povezane, kot s sosedi – v podgrafu porojenem s \mathcal{C} obstaja vpeto drevo \mathcal{T} , tako da je

$$\max_{(u,v) \in \mathcal{L}, u \notin \mathcal{C}, v \in \mathcal{C}} w(u,v) < \min_{(u,v) \in \mathcal{T}} w(u,v)$$

Vpeljemo lahko tudi pojem *enostavnih* otokov z enim samim 'vrhom'.

Lastnosti točkovnih otokov

- Množica točk posamezne komponente točkovnega prereza na izbrani ravni t določa pravi točkovni otok.
- Množica $\mathcal{H}_p(\mathcal{N})$ vseh točkovnih otokov omrežja \mathcal{N} je polna razslojitev:
 - otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem;
 - vsaka točka pripada vsaj enemu otoku.
- Točkovni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije lastnosti p .
- Krajišči iste povezave ne moreta pripadati dvem različnima otokoma.

Postopek za določanje točkovnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže nova točka v iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezana.
- Točko v in z njo povezane otoke združimo v nov, večji otok. Otoki, ki so pri tem združeni, so njegovi podotoki. Točka v je pristanišče novega otoka (točka z najmanjšo vrednostjo).
- To je mogoče izvesti v času $\mathcal{O}(\max(n \log n, m))$.

Enostavni točkovni otoki

- Množica točk $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je (lokalni) *točkovni vrh*, če je pravi točkovni otok in imajo vse njegove točke isto vrednost.
- Točkovni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste točkovnih otokov:
 - PLOSKI – vse njegove točke imajo isto vrednost;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.

Lastnosti povezavnih otokov

- Množice točk povezanih komponent povezavnega prereza na izbrani ravni t so pravi povezavni otoki.
- Množica $\mathcal{H}_w(\mathcal{N})$ vseh pravih povezavnih otokov omrežja \mathcal{N} je razslojitev (ne nujno polna):
 - dva otoka sta ali ločena ali pa je en vsebovan v drugem.
- Povezavni otoki so invariantni za strogo naraščajoče transformacije uteži w .
- Krajišči povezave lahko pripadata dvema ločenima pravima povezavnima otokoma.

Algoritem določitve pravih povezavnih otokov

- Omrežje potopimo v celoti v vodo in jo postopno spuščamo.
- Vsakič, ko se prikaže nova povezava e iz vode, pogledamo, s katerimi od že vidnih otokov je povezana (obstajata največ dva).
- Združimo ta otoka s povezavo ali dodamo povezavo otoku. Dobimo večji otok. Združeni otoki so podotoki tega otoka. Povezava e je *pristanišče* novega otoka (najmanjša vrednost v minimalnem vpetem drevesu).
- Prave povezavne otoke je mogoče določiti v času $\mathcal{O}(m \log n)$.

Enostavni povezavni otoki

- Množica točk $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ določa *povezavni vrh*, Če je pravi povezavni otok, ki vsebuje minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku.
- Povezavni otok je *enostaven*, če ima en sam vrh.
- Obstajajo tri vrste povezavnih otokov:
 - PLOSKI – minimalno vpeto drevo, v katerem imajo vse povezave enako vrednost, kot je največja vrednost povezave v otoku;
 - ENOVRŠNI – otok ima en sam povezavni vrh;
 - VEČVRŠNI – otok ima več povezavnih vrhov.
- PLOSKI ali ENOVRŠNI otoki so enostavni.

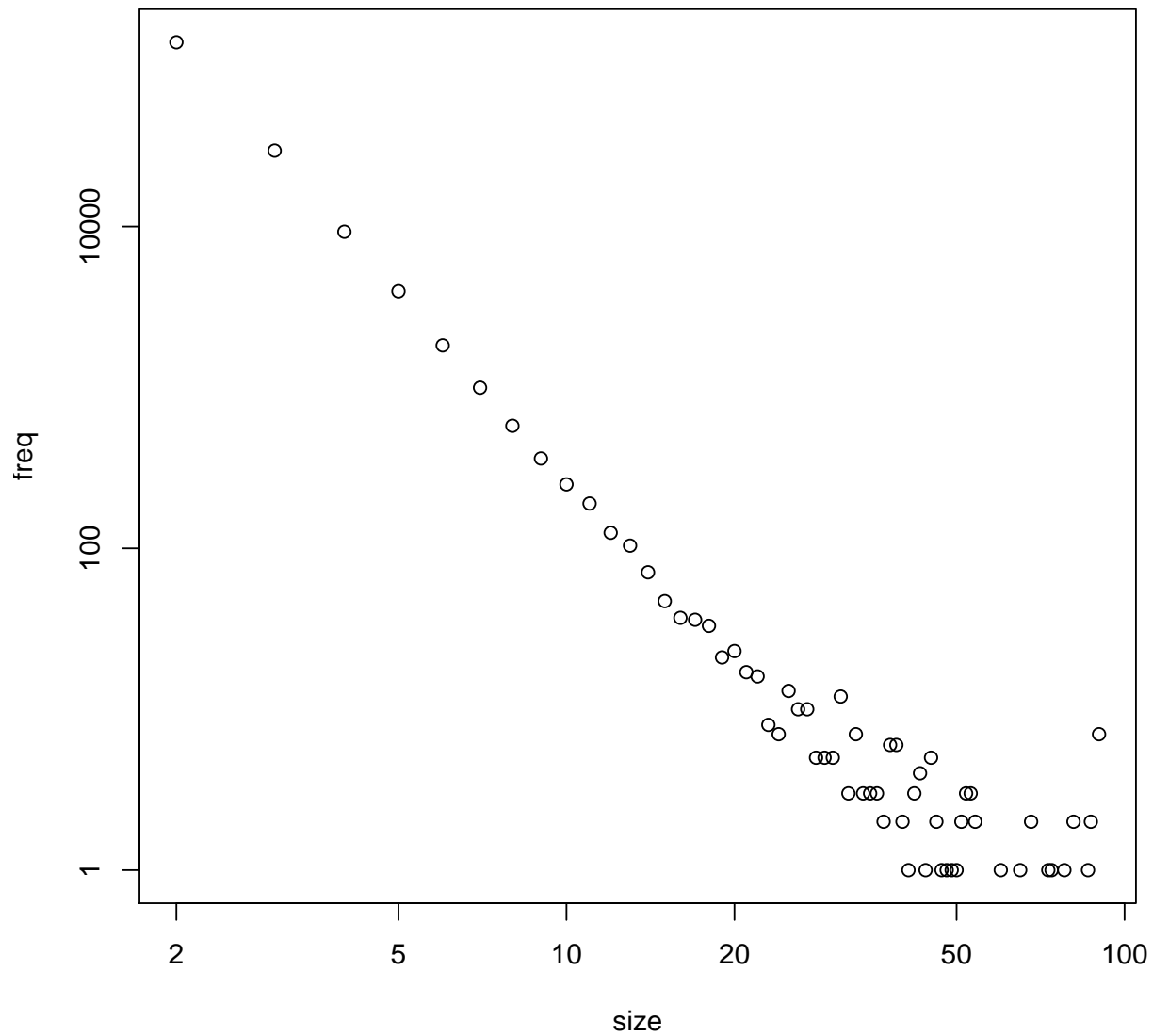
Primer: Ameriški patenti

Omrežje ameriških patentov (**Nber, US Patents**) ima 3774768 točk in 16522438 usmerjenih povezav (1 zanka). Če zanko odstranimo, je omrežje aciklično. Za uteži povezav smo vzeli delež različnih poti od začetkov do koncev, ki vodijo skozi povezavo in določili vse (2,90)-otoke. Z otoki porojeno omrežje ima 470137 točk, 307472 povezav in za različne k :

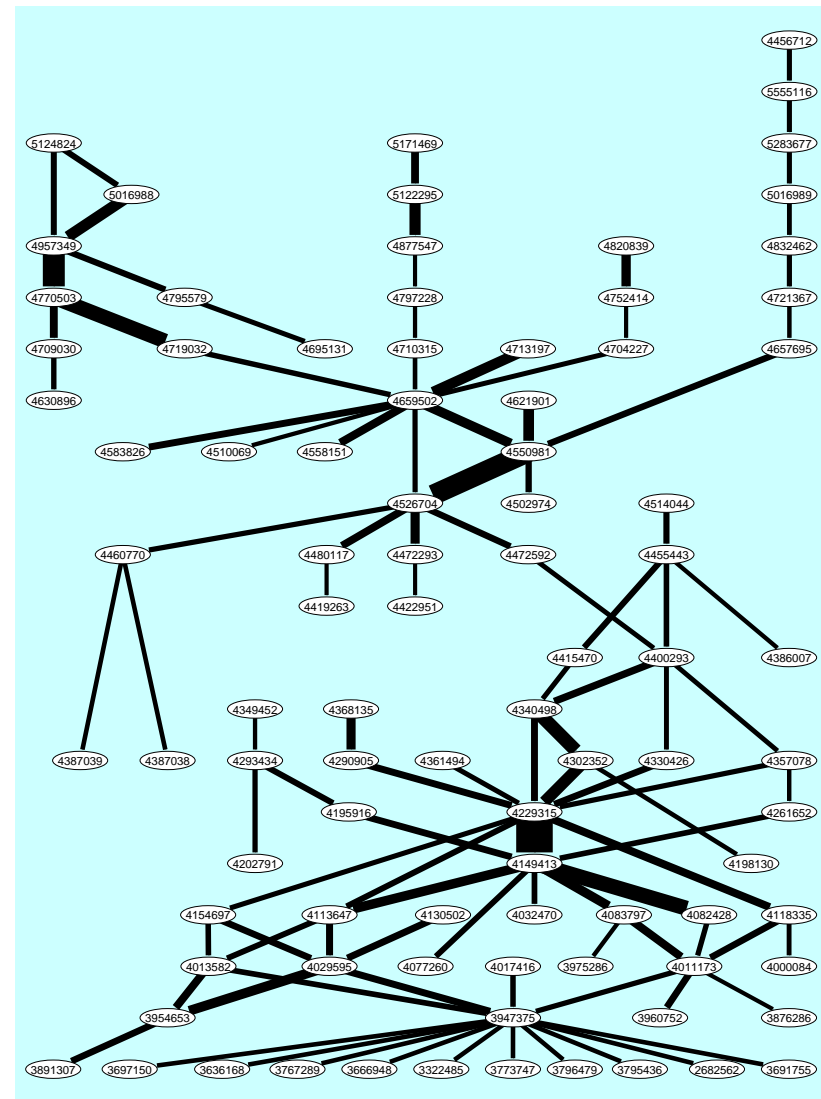
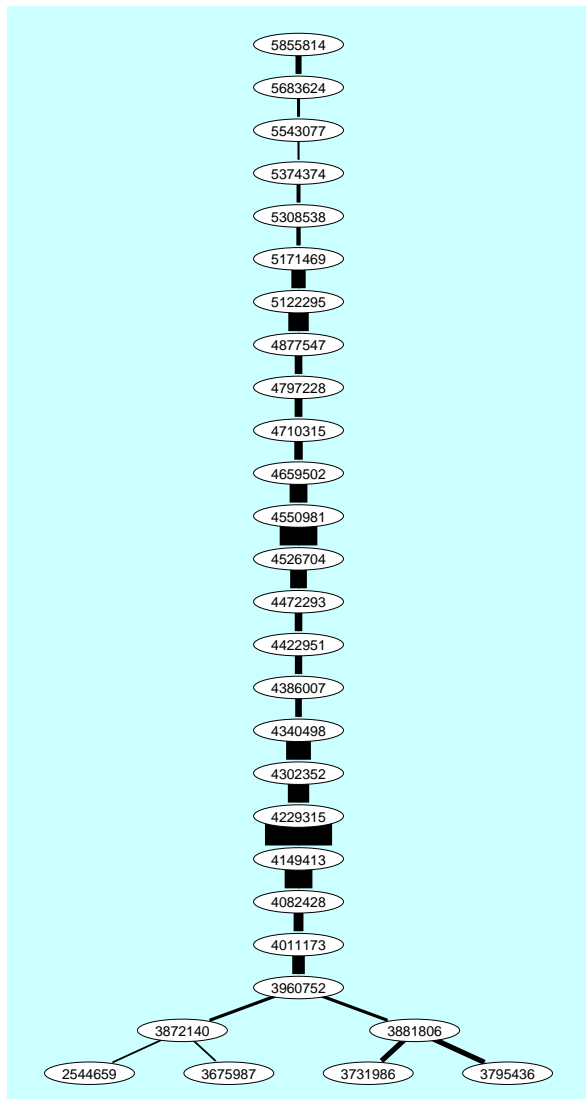
$C_2 = 187610$, $C_5 = 8859$, $C_{30} = 101$, $C_{50} = 30$ otokov. **Rolex**

[1]	0	139793	29670	9288	3966	1827	997	578	362	250
[11]	190	125	104	71	47	37	36	33	21	23
[21]	17	16	8	7	13	10	10	5	5	5
[31]	12	3	7	3	3	3	2	6	6	2
[41]	1	3	4	1	5	2	1	1	1	1
[51]	2	3	3	2	0	0	0	0	0	1
[61]	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0
[71]	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
[81]	2	0	0	0	0	1	2	0	0	7

Porazdelitev velikosti otokov



Glavna pot in glavni otok v US Patents



Glavni otok – Liquid crystal display

Table 1: Patents on the liquid-crystal display

patent	date	author(s) and title
2544659	Mar 13, 1951	Dreyer. Dichroic light-polarizing sheet and the like and the formation and use thereof
2682562	Jun 29, 1954	Wender, et al. Reduction of aromatic carbinols
3322485	May 30, 1967	Williams. Electro-optical elements utilizing an organic nematic compound
3636168	Jan 18, 1972	Josephson. Preparation of polynuclear aromatic compounds
3666948	May 30, 1972	Mechlowitz, et al. Liquid crystal thermal imaging system having an undisturbed image on a disturbed background
3675987	Jul 11, 1972	Rafuse. Liquid crystal compositions and devices
3691755	Sep 19, 1972	Girard. Clock with digital display
3697150	Oct 10, 1972	Wysochi. Electro-optic systems in which an electrophoretic-like or dipolar material is dispersed throughout a liquid crystal to reduce the turn-off time
3731986	May 8, 1973	Ferguson. Display devices utilizing liquid crystal light modulation
3767289	Oct 23, 1973	Aviram, et al. Class of stable trans-stilbene compounds, some displaying nematic mesophases at or near room temperature and others in a range up to 100°C
3773747	Nov 20, 1973	Steinstrasser. Substituted azoxy benzene compounds
3795436	Mar 5, 1974	Boller, et al. Nematogenic material which exhibit the Kerr effect at isotropic temperatures
3796479	Mar 12, 1974	Helfrich, et al. Electro-optical light-modulation cell utilizing a nematogenic material which exhibits the Kerr effect at isotropic temperatures
3872140	Mar 18, 1975	Klanderma, et al. Liquid crystalline compositions and method
3876286	Apr 8, 1975	Deutscher, et al. Use of nematic liquid crystalline substances
3881806	May 6, 1975	Suzuki. Electro-optical display device
3891307	Jun 24, 1975	Tsakamoto, et al. Phase control of the voltages applied to opposite electrodes for a cholesteric to nematic phase transition display
3947375	Mar 30, 1976	Gray, et al. Liquid crystal materials and devices
3954653	May 4, 1976	Yamazaki. Liquid crystal composition having high dielectric anisotropy and display device incorporating same
3960752	Jun 1, 1976	Klanderma, et al. Liquid crystal compositions
3975286	Aug 17, 1976	Oh. Low voltage actuated field effect liquid crystals compositions and method of synthesis
4000084	Dec 28, 1976	Hsieh, et al. Liquid crystal mixtures for electro-optical display devices
4011173	Mar 8, 1977	Steinstrasser. Modified nematic mixtures with positive dielectric anisotropy
4013582	Mar 22, 1977	Gavrilovic. Liquid crystal compounds and electro-optic devices incorporating them
4017416	Apr 12, 1977	Inukai, et al. P-cyanophenyl 4-alkyl-4'-biphenylcarboxylate, method for preparing same and liquid crystal compositions using same
4029595	Jun 14, 1977	Rees, et al. Novel liquid crystal compounds and electro-optic devices incorporating them
4032470	Jun 28, 1977	Bloom, et al. Electro-optic device
4077260	Mar 7, 1978	Gray, et al. Optically active cyano-biphenyl compounds and liquid crystal materials containing them
4082428	Apr 4, 1978	Hsu. Liquid crystal composition and method

Table 2: Patents on the liquid-crystal display

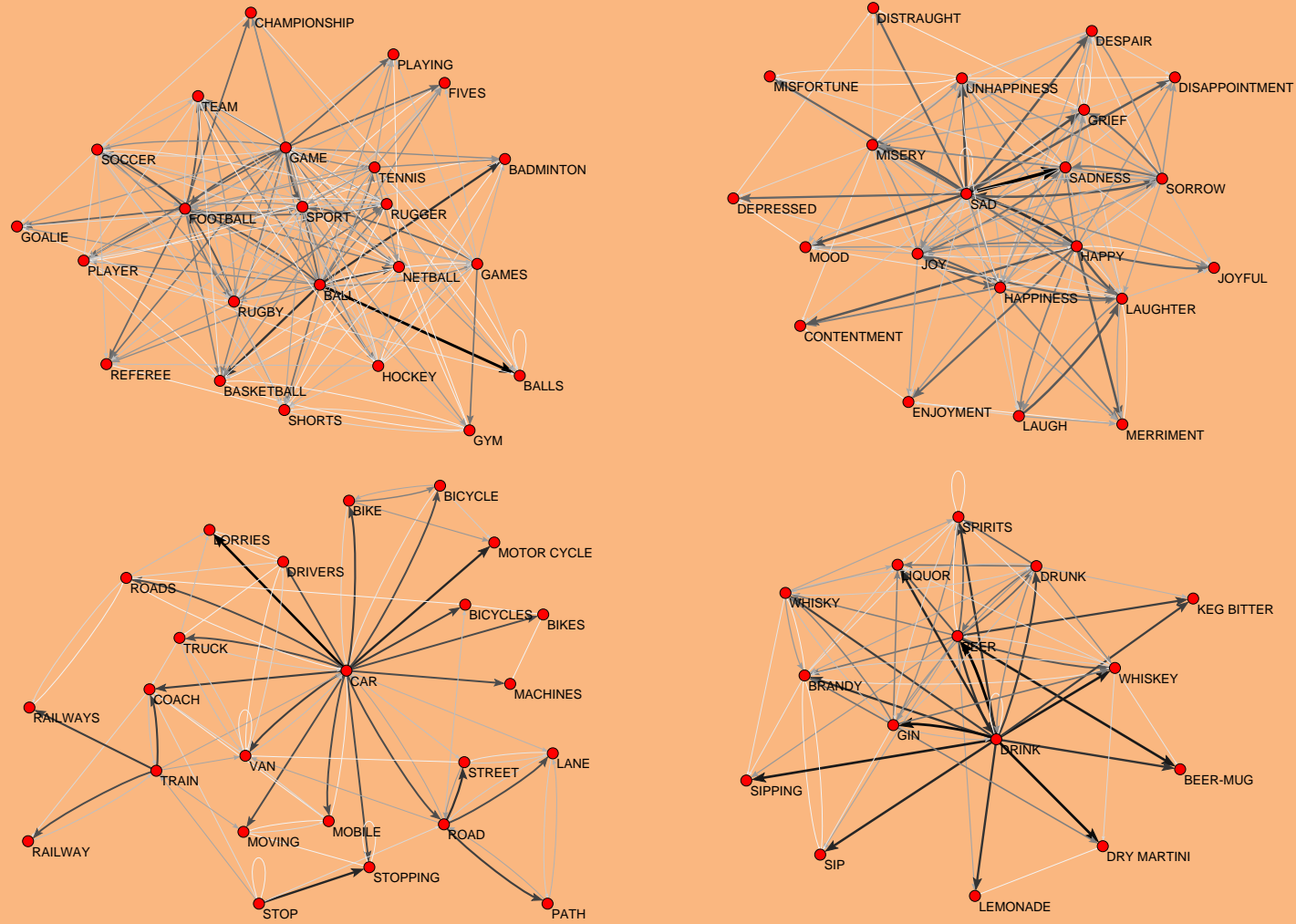
patent	date	author(s) and title
4083797	Apr 11, 1978	Oh. Nematic liquid crystal compositions
4113647	Sep 12, 1978	Coates, et al. Liquid crystalline materials
4118335	Oct 3, 1978	Krause, et al. Liquid crystalline materials of reduced viscosity
4130502	Dec 19, 1978	Eidenschink, et al. Liquid crystalline cyclohexane derivatives
4149413	Apr 17, 1979	Gray, et al. Optically active liquid crystal mixtures and liquid crystal devices containing them
4154697	May 15, 1979	Eidenschink, et al. Liquid crystalline hexahydroterphenyl derivatives
4195916	Apr 1, 1980	Coates, et al. Liquid crystal compounds
4198130	Apr 15, 1980	Boller, et al. Liquid crystal mixtures
4202791	May 13, 1980	Sato, et al. Nematic liquid crystalline materials
4229315	Oct 21, 1980	Krause, et al. Liquid crystalline cyclohexane derivatives
4261652	Apr 14, 1981	Gray, et al. Liquid crystal compounds and materials and devices containing them
4290905	Sep 22, 1981	Kanbe. Ester compound
4293434	Oct 6, 1981	Deutscher, et al. Liquid crystal compounds
4302352	Nov 24, 1981	Eidenschink, et al. Fluorophenylcyclohexanes, the preparation thereof and their use as components of liquid crystal dielectrics
4330426	May 18, 1982	Eidenschink, et al. Cyclohexylbiphenyls, their preparation and use in dielectrics and electrooptical display elements
4340498	Jul 20, 1982	Suginori. Halogenated ester derivatives
4349452	Sep 14, 1982	Osman, et al. Cyclohexylcyclohexanoates
4357078	Nov 2, 1982	Carr, et al. Liquid crystal compounds containing an alicyclic ring and exhibiting a low dielectric anisotropy and liquid crystal materials and devices incorporating such compounds
4361494	Nov 30, 1982	Osman, et al. Anisotropic cyclohexyl cyclohexylmethyl ethers
4368135	Jan 11, 1983	Osman. Anisotropic compounds with negative or positive DC-anisotropy and low optical anisotropy
4386007	May 31, 1983	Krause, et al. Liquid crystalline naphthalene derivatives
4387038	Jun 7, 1983	Fukui, et al. 4-(Trans-4'-alkylcyclohexyl) benzoic acid 4"-cyano-4"-biphenyl esters
4387039	Jun 7, 1983	Suginori, et al. Trans-4-(trans-4'-alkylcyclohexyl)-cyclohexane carboxylic acid 4"-cyanobiphenyl ester
4400293	Aug 23, 1983	Romer, et al. Liquid crystalline cyclohexylphenyl derivatives
4415470	Nov 15, 1983	Eidenschink, et al. Liquid crystalline fluorine-containing cyclohexylbiphenyls and dielectrics and electro-optical display elements based thereon
4419263	Dec 6, 1983	Praefcke, et al. Liquid crystalline cyclohexylcarbonitrile derivatives
4422951	Dec 27, 1983	Suginori, et al. Liquid crystal benzene derivatives
4455443	Jun 19, 1984	Takatsui, et al. Nematic halogen Compound
4456742	Jun 26, 1984	Christie, et al. Bismaleimide triazine composition
4460770	Jul 17, 1984	Petrzalka, et al. Liquid crystal mixture
4472293	Sep 18, 1984	Suginori, et al. High temperature liquid crystal substances of four rings and liquid crystal compositions containing the same
4472592	Sep 18, 1984	Takatsui, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4480117	Oct 30, 1984	Takatsui, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4502974	Mar 5, 1985	Suginori, et al. High temperature liquid-crystalline ester compounds
4510069	Apr 9, 1985	Eidenschink, et al. Cyclohexane derivatives

Table 3: Patents on the liquid-crystal display

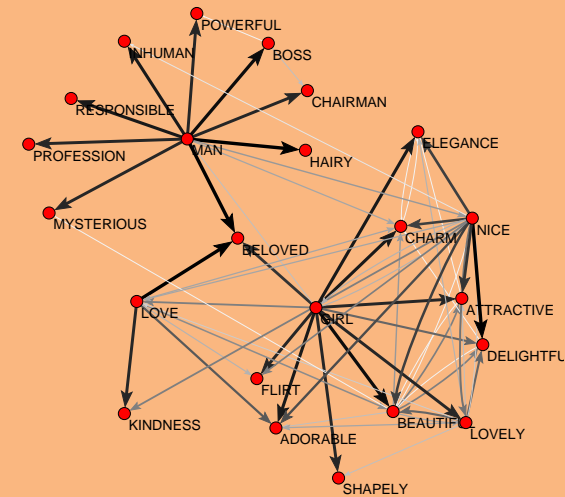
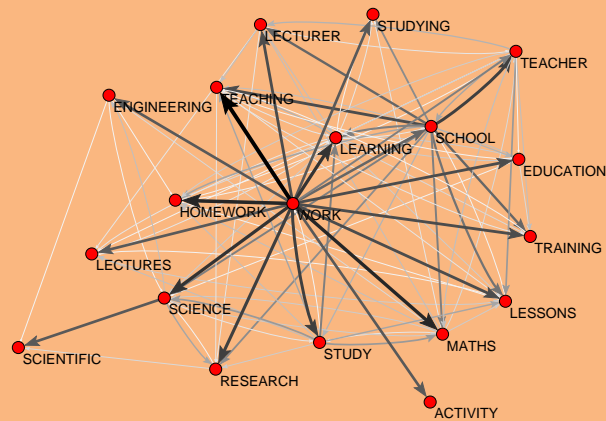
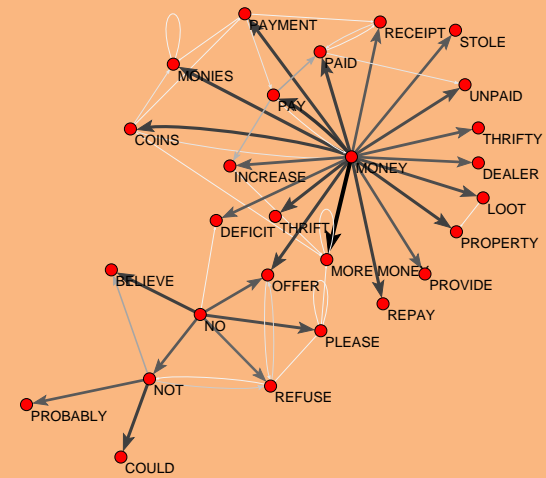
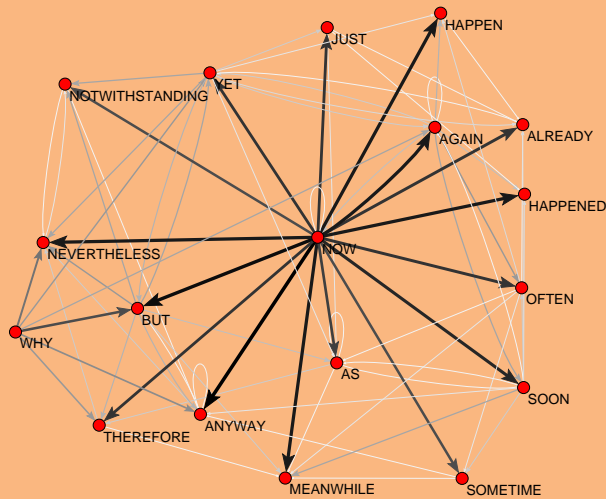
patent	date	author(s) and title
4514044	Apr 30, 1985	Gunjima, et al. 1-(Trans-4-alkylcyclohexyl)-2-(trans-4'-(p-substituted phenyl) cyclohexyl)ethane and liquid crystal mixture
4526704	Jul 2, 1985	Petrzalka, et al. Multiring liquid crystal esters
4550981	Nov 5, 1985	Petrzalka, et al. Liquid crystalline esters and mixtures
4558151	Dec 10, 1985	Takatsui, et al. Nematic liquid crystalline compounds
4583826	Apr 22, 1986	Petrzalka, et al. Phenylethanes
4621901	Nov 11, 1986	Petrzalka, et al. Novel liquid crystal mixtures
4630896	Dec 23, 1986	Petrzalka, et al. Benzotrioles
4657695	Apr 14, 1987	Saito, et al. Substituted pyridazines
4659502	Apr 21, 1987	Fearon, et al. Ethane derivatives
4695131	Sep 22, 1987	Balkwill, et al. Disubstituted ethanes and their use in liquid crystal materials and devices
4704227	Nov 3, 1987	Krause, et al. Liquid crystal compounds
4709030	Nov 24, 1987	Petrzalka, et al. Novel liquid crystal mixtures
4710315	Dec 1, 1987	Schad, et al. Anisotropic compounds and liquid crystal mixtures therewith
4713197	Dec 15, 1987	Eidenschink, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4719032	Jan 12, 1988	Wachtler, et al. Cyclohexane derivatives
4721367	Jan 26, 1988	Yoshinaga, et al. Liquid crystal device
4752414	Jun 21, 1988	Eidenschink, et al. Nitrogen-containing heterocyclic compounds
4770503	Sep 13, 1988	Buechecker, et al. Liquid crystalline compounds
4795579	Jan 3, 1989	Vaucher, et al. 2,2'-difluoro-4-alkoxy-4'-hydroxydiphenyls and their derivatives, their production process and their use in liquid crystal display devices
4797228	Jan 10, 1989	Goto, et al. Cyclohexane derivative and liquid crystal composition containing same
4820839	Apr 11, 1989	Krause, et al. Nitrogen-containing heterocyclic esters
4832462	May 23, 1989	Clark, et al. Liquid crystal devices
4877547	Oct 31, 1989	Weber, et al. Liquid crystal display element
4957349	Sep 18, 1990	Clerc, et al. Active matrix screen for the color display of television pictures, control system and process for producing said screen
5016988	May 21, 1991	Imura. Liquid crystal display device with a birefringent compensator
5016989	May 21, 1991	Okada. Liquid crystal element with improved contrast and brightness
5122295	Jun 16, 1992	Weber, et al. Matrix liquid crystal display
5124824	Jun 23, 1992	Kozaki, et al. Liquid crystal display device comprising a retardation compensation layer having a maximum principal refractive index in the thickness direction
5171469	Dec 15, 1992	Hittich, et al. Liquid-crystal matrix display
5283677	Feb 1, 1994	Sagawa, et al. Liquid crystal display with ground regions between terminal groups
5308538	May 3, 1994	Weber, et al. Supertwist liquid-crystal display
5374374	Dec 20, 1994	Weber, et al. Supertwist liquid-crystal display
5543077	Aug 6, 1996	Rieger, et al. Nematic liquid-crystal composition
5551116	Sep 10, 1996	Ishikawa, et al. Liquid crystal display having adjacent electrode terminals set equal in length
5683624	Nov 4, 1997	Sekiguchi, et al. Liquid crystal composition
5855814	Jan 5, 1999	Matsui, et al. Liquid crystal compositions and liquid crystal display elements

Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus

$n = 23219$, $m = 325624$, transitivity weight



... Otoki – The Edinburgh Associative Thesaurus



Gruče

Predlaganih je bilo veliko pojmov, ki opisujejo zgoščene skupini ali gruče v omrežjih.

Klika reda k v grafu je maksimalni polni (izomorfen K_k) podgraf, $k \geq 3$.

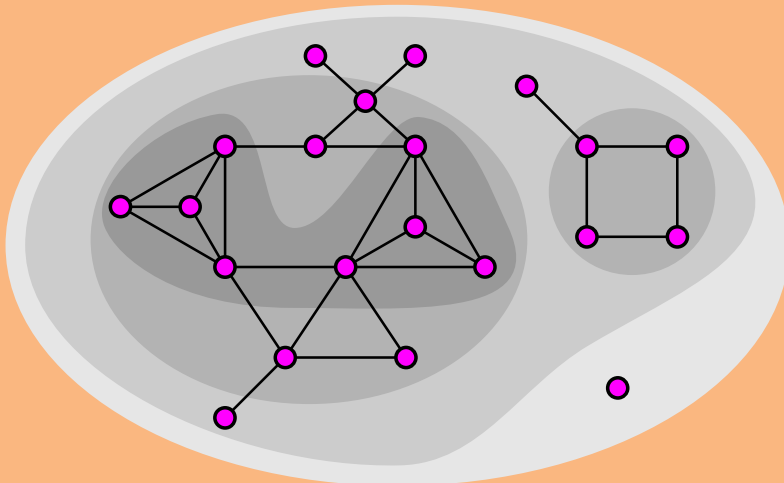
s-klika je maksimalni podgraf \mathcal{H} , v katerem najkrajša pot med poljubnima njenima točkama ne presega s . $\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d(u, v) \leq s$.

s-klan je s -klika s premerom s . $\forall u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(u, v) \leq s$.

s -pleksi, množice LS, množice lambda, sredice, ...

Za vse, razen za sredice, se je pokazalo, da jih je težko določiti.

Sredice in posplošene sredice



Pojem sredice je vpeljal Seidman leta 1983. Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{W}, \mathcal{L}(\mathcal{W}))$ grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ porojen z množico \mathcal{W} je *k-sredica* ali *sredica reda k* ntk. $\forall v \in \mathcal{W} : \deg_{\mathcal{H}}(v) \geq k$ in je \mathcal{H} maksimalni podgraf s to lastnostjo.

Sredici največjega reda v grafu pravimo tudi *glavna* sredica.

Sredičnost točke v je enaka največjemu redu sredice, ki še vsebuje to točko.

Stopnja $\deg(v)$ v definiciji sredice je lahko: vhodna, izhodna, celotna, itd., kar da različne vrste sredic.

Lastnosti sredic

S slike na prejšnji prosojnici, ki prikazuje sredice redov 0, 1, 2 in 3, vidimo:

- Sredice so gnezdene – določajo razslojitev: $i < j \implies \mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}_i$
- Sredice danega reda niso vselej povezani podgrafi.

Učinkovit postopek za določitev sredic temelji na lastnosti:

Če iz danega grafa $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ zaporedoma odstranjujemo vse točke (in pripadajoče povezave), ki imajo stopnjo manjšo od k , bo podgraf, ki bo ostal, sredica reda k .

Postopek določanja sredič

Input : Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ predstavljen s seznama sosedov

Output : Tabela $core[\mathcal{V}]$ sredičnosti točk

Določi stopnje točk $degree$

Uredi množico točk \mathcal{V} v naraščajočem vrstnem redu njihovih stopenj

for $v \in \mathcal{V}$ *glede na tekočo urejenost* **do**

$core[v] = degree[v]$

for $u \in N(v)$ **do**

if $degree[u] > degree[v]$ **then**

$degree[u] = degree[u] - 1$

$\mathcal{V} = \mathcal{V} \setminus \{v\}$; Preuredi \mathcal{V}

end

end

end

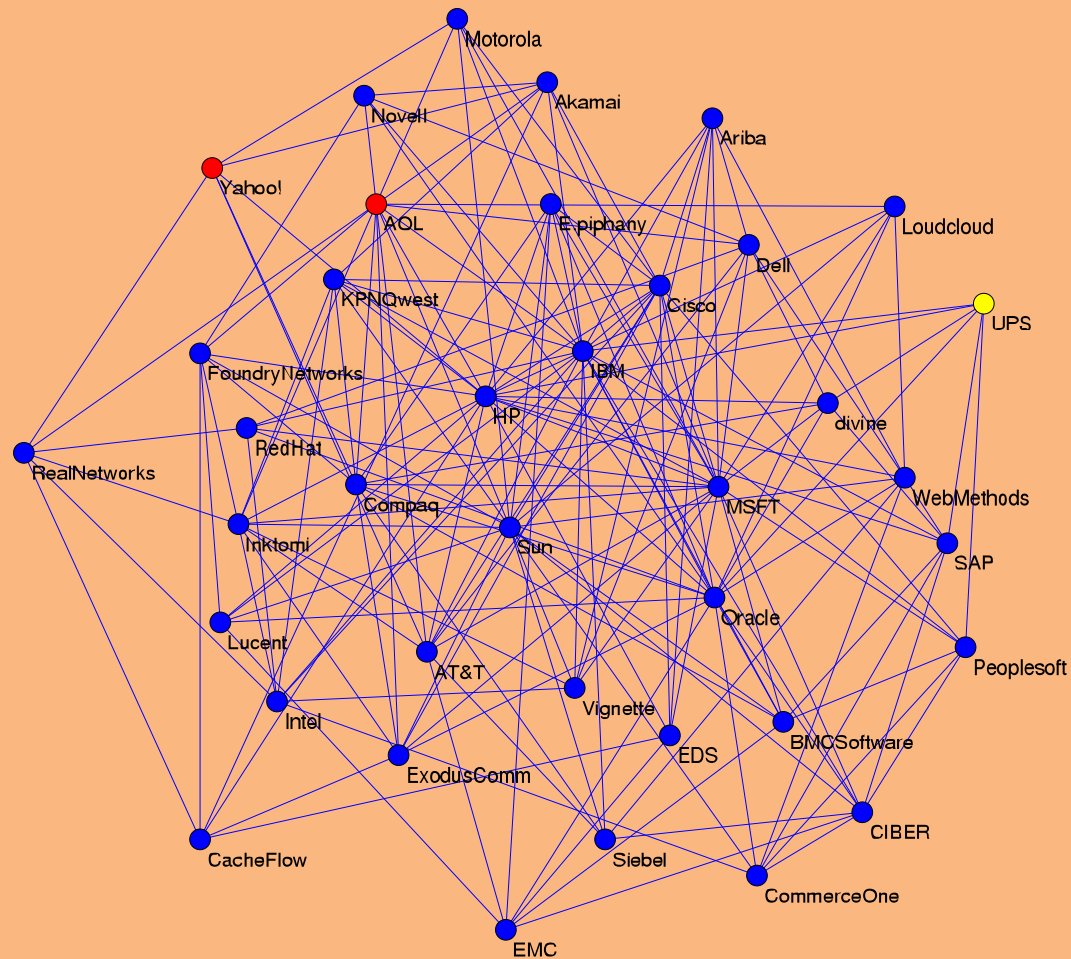
...postopek določanja sredic

Pri razdelavi postopka je potrebno poskrbeti za hitro urejanje tabele *degree* in njeno preurejanje. Ker so vrednosti stopenj med 0 in $n - 1$ lahko s postopkom 'kupčkanja' to naredimo v času $O(n)$; urejenost lahko popravljamo v konstantnem času. Celoten postopek lahko izvedemo v času $O(m)$.

Sredice so eden od redkih učinkovitih pristopov za določanje gostih delov grafa. Uporabimo jih lahko tudi za pohitritve drugih, zahtevnejših postopkov saj so na primer k -komponente in klike reda k vsebovane v sredici reda k . Velja tudi naslednja ocena za barvnost grafa \mathcal{G}

$$\chi(\mathcal{G}) \leq 1 + \text{core}(\mathcal{G})$$

Sredica reda 6 za Krebsova Internetna podjetja



Posplošene sredice

Pojem sredice lahko posplošimo na omrežja. Naj bo \mathcal{N} omrežje nad grafom $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Privzemimo, da imamo na \mathcal{N} določeno funkcijo $p(v, \mathcal{U})$, $v \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ z realnimi vrednostmi – *p-funkcijo*.

Označimo $N_{\mathcal{U}}(v) = N(v) \cap \mathcal{U}$. Poleg stopenj so *p-funkcije* npr. še:

$$p_S(v, \mathcal{U}) = \sum_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$p_M(v, \mathcal{U}) = \max_{u \in N_{\mathcal{U}}(v)} w(v, u), \text{ kjer je } w : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_t(v, \mathcal{U}) = \frac{|\mathcal{L}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{L}(K(N^+(v)))|}{|\mathcal{L}(K(N^+(v)))|}$$

$$p_k(v, \mathcal{U}) = \text{število ciklov dolžine } k \text{ skozi točko } v \text{ v } (\mathcal{U}, \mathcal{L}(\mathcal{U}))$$

Podgraf $\mathcal{H} = (\mathcal{C}, \mathcal{L}(\mathcal{C}))$ porojen z množico $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ je *p-sredica* na ravni $t \in \mathbb{R}$ ntk. $\forall v \in \mathcal{C} : t \leq p(v, \mathcal{C})$ in je \mathcal{C} maksimalna taka množica.

Postopek za posplošene sredice

Funkcija p je *monotona* ntk. zanjo velja

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{V} : (p(v, \mathcal{C}_1) \leq p(v, \mathcal{C}_2))$$

Stopnje in funkcije p_S , p_M , p_t ter p_k so monotone.

Za monotone funkcije lahko ustrezno p -sredico na ravni t določimo, kot pri navadnih sredicah, z zaporednim odmetavanjem točk z vrednostjo p manjšo od t . Sredice na različnih ravneh so gnezdene

$$t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{t_2} \subseteq \mathcal{H}_{t_1}$$

p -funkcija je *lokalna* ntk. $p(v, \mathcal{U}) = p(v, N_{\mathcal{U}}(v))$.

Stopnje, p_S , p_M in p_t so lokalne; toda p_k **ni** lokalna za $k \geq 4$. Za lokalno p -funkcijo obstaja postopek reda $O(m \max(\Delta, \log n))$ za določitev razslojitve na p -sredice, če le lahko $p(v, N_{\mathcal{C}}(v))$ določimo v času $O(\deg_{\mathcal{C}}(v))$.

Omrežje sodelovanj GeomBib

Iz B. Jones-ove bibliografija računalniške geometrije *Computational geometry database* (2002), *FTP*, *Geom.net*. smo sestavili omrežje sodelovanj. Avtorja določata povezavo, če sta napisala skupno delo. Utež povezave je enaka številu skupnih del.

To omrežje je zahtevalo veliko 'čiščenja' zaradi težav z razpoznavanjem posameznih avtorjev. Tako na primer: Pankaj K. Agarwal, P. Agarwal, Pankaj Agarwal in P.K. Agarwal določajo isto osebo.

$$n = 9072, m = 13567/22577 \rightarrow n' = 7343, m' = 11898.$$

p_S -sredica omrežja GeomBib na ravni 46

