London Tube

Univerza v Ljubljani podiplomski študij statistike

Analiza omrežij

4. Zgradba omrežij: povezanosti

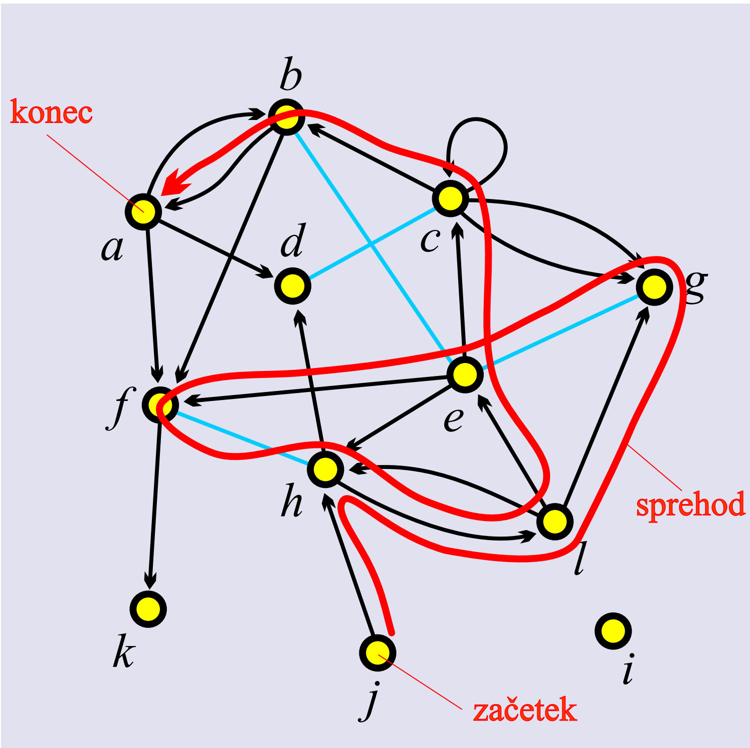
Vladimir Batagelj

Univerza v Ljubljani

Ljubljana, 17. november 2006 / 10. in 17. november 2003

Kazalo

Sprehodi



dolžina $|s|$ sprehoda s je število povezav, ki ga sestavljajo.

$s = (j, h, l, g, e, f, h, l, e, c, b, a)$

$|s| = 11$

Sprehod je *sklenjen* ali *obhod* ntk. njegov začetek in konec sovpadata.

Če ne upoštevamo smeri povezav v 'sprehodu', dobimo *polsprehod* ali *verigo*.

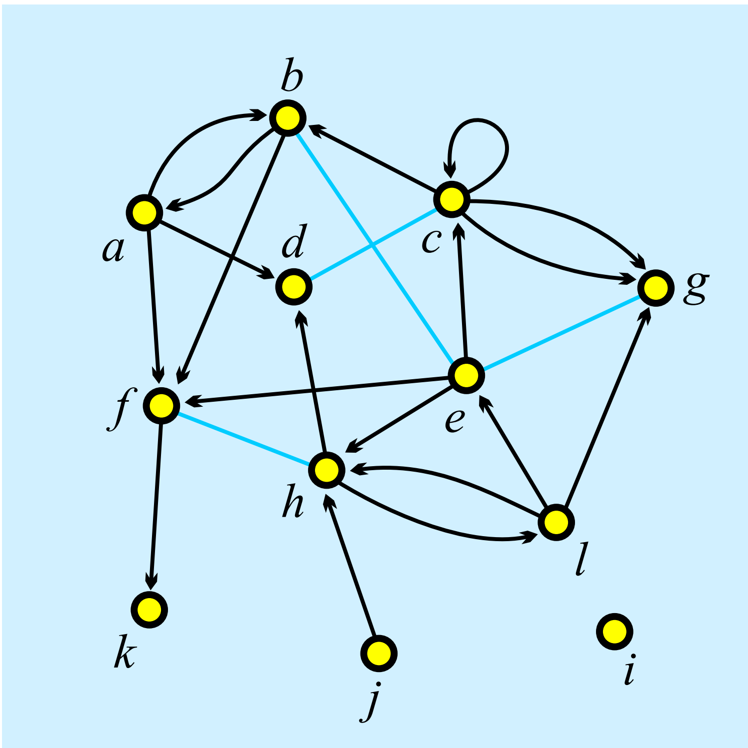
sled – sprehod z različnimi povezavami

pot – sprehod z različnimi točkami

cikel – sklenjen sprehod z različnimi notranjimi točkami.

Graf je *acikličen*, ntk. ne vsebuje nobenega cikla.

Najkrajše poti



Dolžino najkrajše poti iz u v v označimo z $d(u, v)$.

Če ne obstaja sprehod iz u v v postavimo $d(u, v) = \infty$.

$d(j, a) = |(j, h, d, c, b, a)| = 5$

$d(a, j) = \infty$

$\hat{d}(u, v) = \max(d(u, v), d(v, u))$

je *razdalja*:

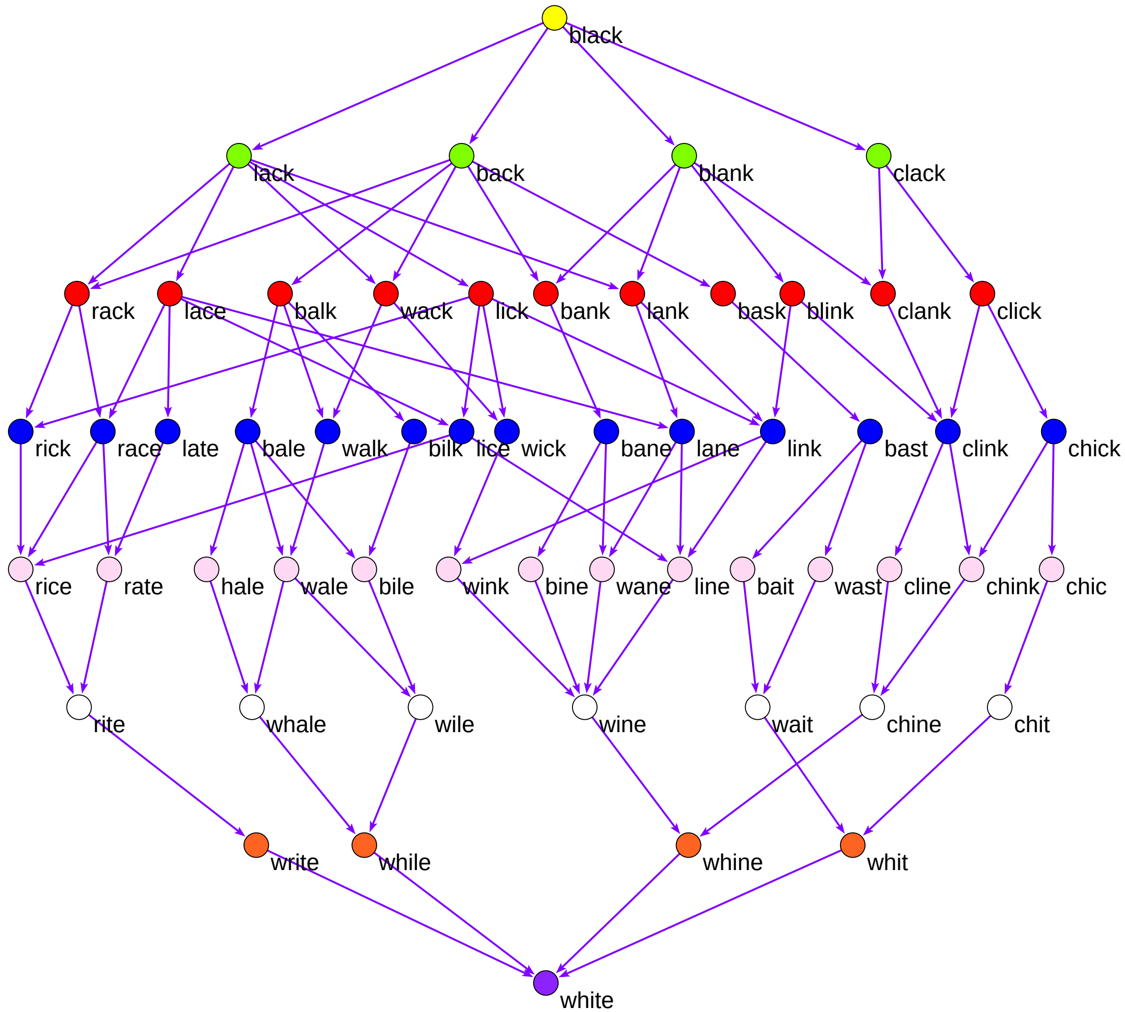
$\hat{d}(v, v) = 0$, $\hat{d}(u, v) = \hat{d}(v, u)$,

$\hat{d}(u, v) \leq \hat{d}(u, t) + \hat{d}(t, v)$.

Premer grafa je enak razdalji med, glede na $d(u, v)$, najoddaljenejšima točkama: $D = \max_{u,v \in \mathcal{V}} d(u, v)$.

```
Net / Paths between 2 vertices /
```

Najkrajše poti



DICT28.

Enakovrednosti in razbitja

Relacija R na $\mathcal{V}$ je *enakovrednost* ntk. je *refleksivna* $\forall v \in \mathcal{V} : vRv$, *simetrična* $\forall u, v \in \mathcal{V} : (uRv \Rightarrow vRu)$ in *tranzitivna* $\forall u, v, z \in \mathcal{V} : uRz \wedge zRv \Rightarrow uRv$.

Vsaka enakovrednost R določa neko razbitje v *razrede* $[v] = \{u : vRu\}$.

Vsako razbitje **C** določa neko enakovrednost $uRv \Leftrightarrow \exists C \in \mathbf{C} : u \in C \wedge v \in C$.

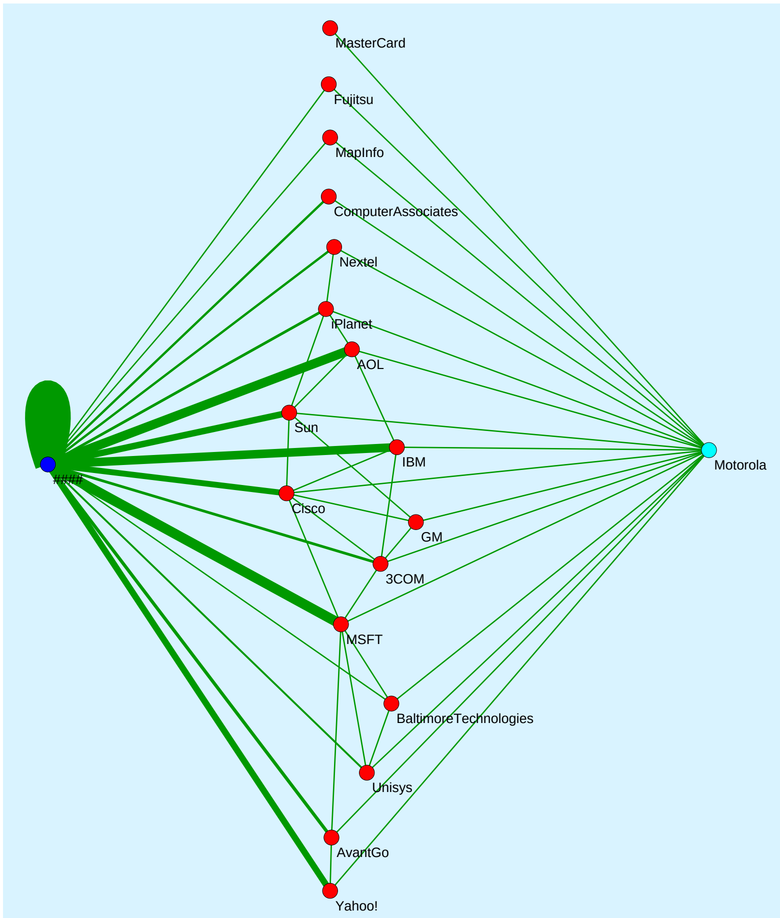
k-sosedi točke v je množica točk, ki so za k oddaljene od v, $N^k(v) = \{u \in v : d(v, u) = k\}$.

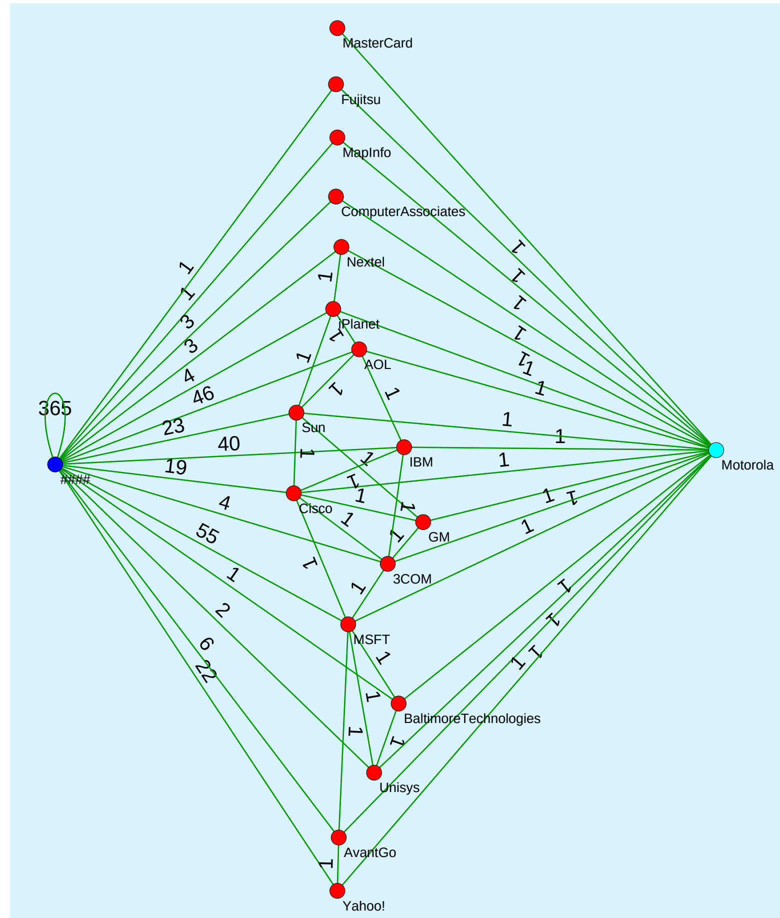
Množica vseh množic k-sosedov, $k = 0, 1, \ldots$ of v je razbitje množice $\mathcal{V}$.

k-soseščina točke v, $N^{(k)}(v) = \{u \in v : d(v, u) \leq k\}$.

`Net / k-Neighbors /`

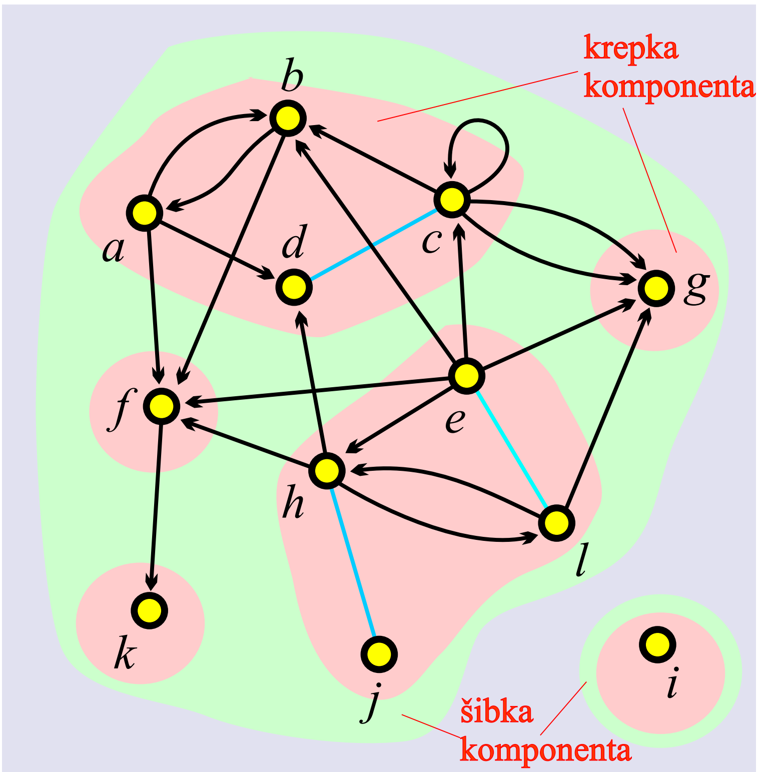
Soseščina Motorole





Debelina povezav je koren iz vrednosti.

Povezanosti



Točka u je *dosegljiva* iz točke v ntk. obstaja sprehod z začetkom v in koncem u.

Točka v je *šibko povezana* s točko u ntk. obstaja veriga s krajiščema v in u.

Točka v je *krepko povezana* s točko u ntk. sta vzajemno dosegljivi.

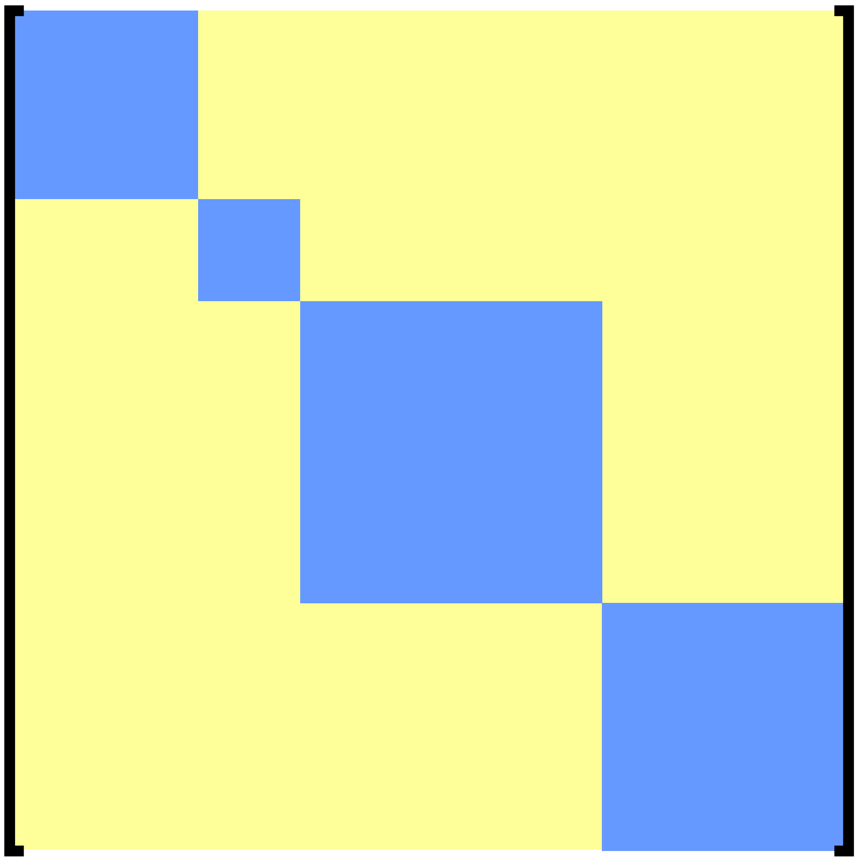
Šibka in krepka povezanost sta enakovrednosti.

`graphCon.net`

Razredi porajajo šibke/krepke *komponente* ali *kose* grafa.

`Net / Components /`

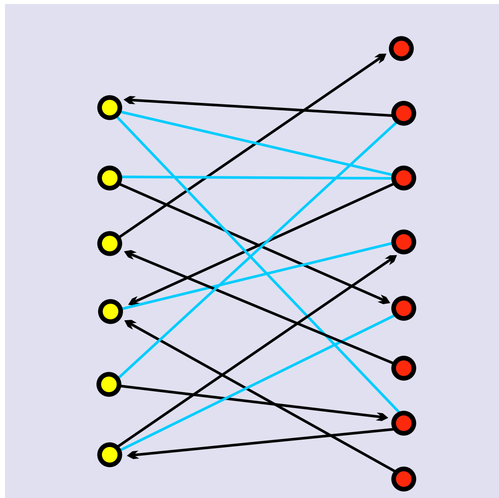
Šibke komponente

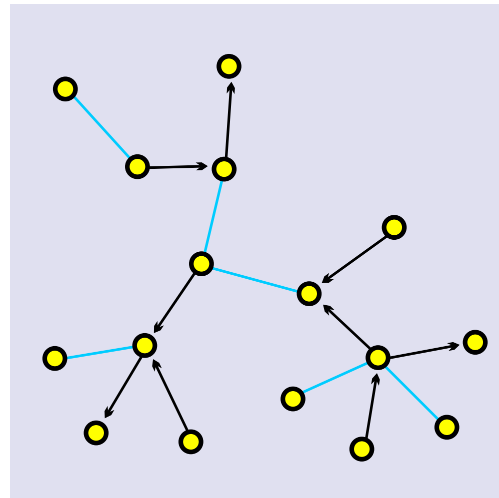


Če preuredimo točke omrežja, tako da točke iz iste skupine šibkega razbitja postavimo skupaj, dobimo matrični prikaz sestavljen iz diagonalnih blokov – šibkih komponent.

Za večino problemov velja, da jih lahko ločeno rešimo za vsako šibko komponento posebej in nato dobljene rešitve združimo v rešitev za celotno omrežje.

Posebni grafi – dvodelni, drevo

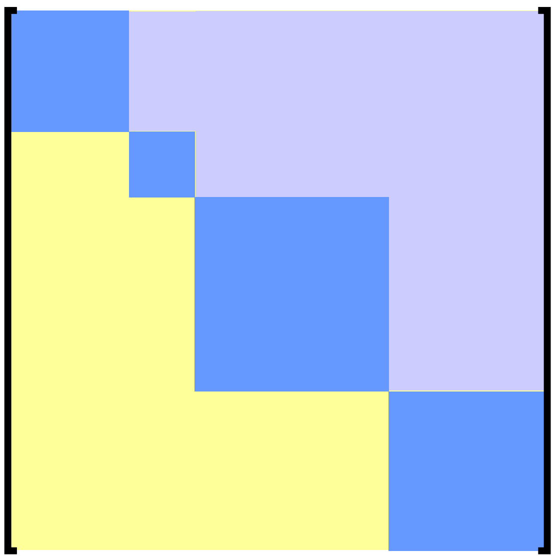


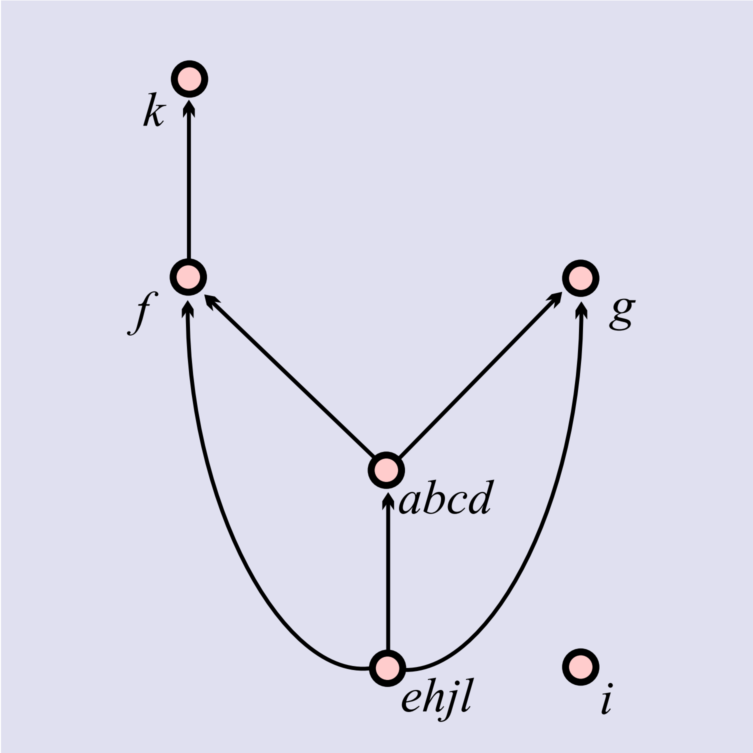


Graf $G = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ je *dvodelen* ntk. lahko množico točk $\mathcal{V}$ razbijemo na podmnožici V_1 in V_2, tako da ima vsaka povezava iz $\mathcal{L}$ eno krajišče v $\mathcal{V}_1$ drugo pa v $\mathcal{V}_2$.

Šibko povezan graf G je *drevo* ntk. ne vsebuje (zank in) polciklov dolžine vsaj 3.

Skrčitev grafa

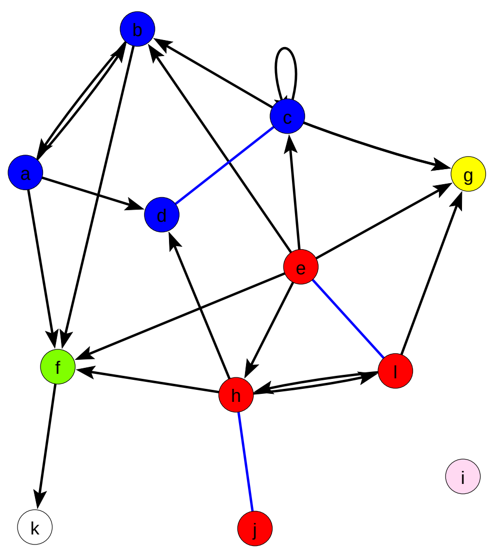


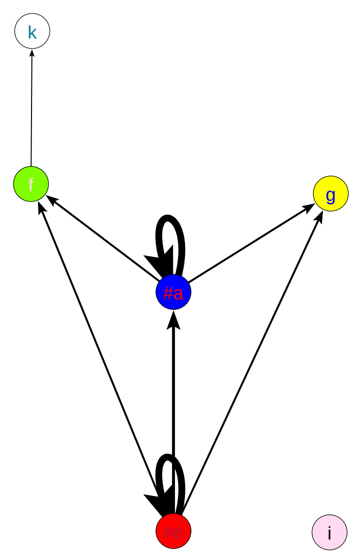


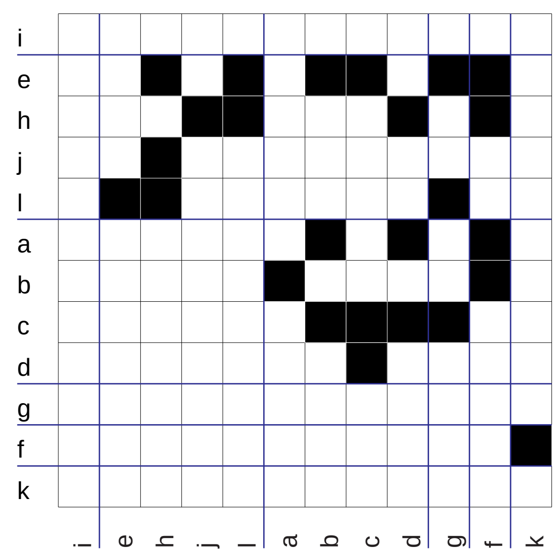
Če v danem grafu skrčimo vsako krepko komponento v ustrezno točko, odstranimo zanke in združimo vzporedne povezave, je tako dobljeni *skrčeni* graf acikličen. Za vsak aciklični graf obstaja *urejenost* / *oštevilčenje* $i : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$, tako da velja $(u, v) \in \mathcal{A} \Rightarrow i(u) < i(v)$.

Skrčitev grafa – primer

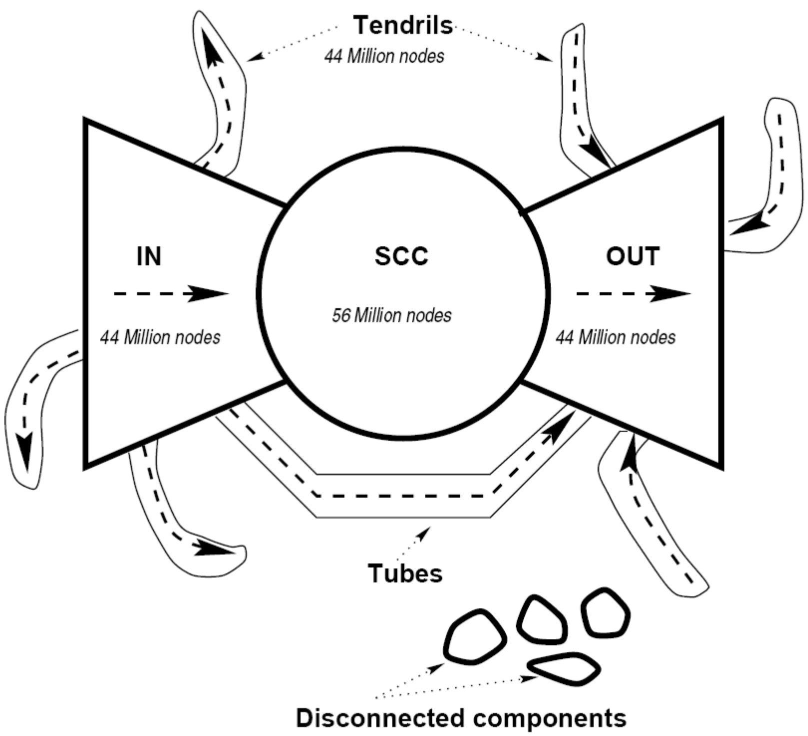
```
Net / Components / Strong [1]
Operations / Shrink Network / Partition [1][0]
Net / Transform / Remove / Loops [yes]
Net / Partitions / Depth / Acyclic
Partition / Make Permutation
Permutation / Inverse
select partition [Strong Components]
Operations / Functional Composition / Partition*Permutation
Partition / Make Permutation
select [original network]
File / Network / Export Matrix to EPS / Using Permutation
```







Spletni metuljček (Bow-tie)



Kumar &: The Web as a graph

Naj bo $\mathcal{S}$ *največja krepka komponenta* v omrežju $\mathcal{N}$; $\mathcal{W}$ šibka komponenta, ki vsebuje $\mathcal{S}$; $\mathcal{I}$ množica točk, iz katerih je $\mathcal{S}$ dosegljiva; $\mathcal{O}$ množica točk dosegljivih iz $\mathcal{S}$; $\mathcal{T}$ (cevi) točke (niso v $\mathcal{S}$) na poteh iz $\mathcal{I}$ v $\mathcal{O}$; $\mathcal{R} = \mathcal{W} \setminus (\mathcal{I} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{T})$ (lovke); in $\mathcal{D} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$. Razbitje

$$\{\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{R}, \mathcal{D}\}$$

imenujemo *metuljčno* razbitje $\mathcal{V}$.

`Net / Partitions / Bow-Tie`

Dvopovezanost

Točki u in v sta *dvopovezani* ntk. sta povezani (v obe smeri) s po dvema neodvisnima (brez skupnih notranjih točk) potema.

Dvopovezanost določa razbitje množice povezav.

Točka je *stična* točka ali *stičišče* ntk. njena odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

Povezava je *most* ntk. njena odstranitev poveča število šibkih komponent grafa.

`Net / Components / Bi-Components`

k-povezanost

Točkovna povezanost κ grafa G je enaka najmanjšemu številu točk, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi točkami nepovezan ali trivialen (enak K_1).

Povezavna povezanost λ grafa G je enaka najmanjšemu številu povezav, ki jih je potrebno odvzeti iz grafa, tako da je graf porojen s prestalimi povezavami nepovezan ali trivialen.

Velja Whitneyeva neenakost: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

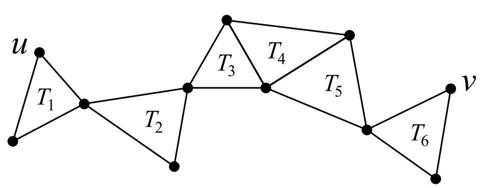
Graf G je *(po točkah) $k-$povezan*, če je $\kappa(G) \geq k$ in je *po povezavah $k-$povezan*, če je $\lambda(G) \geq k$.

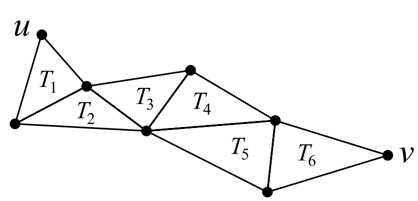
Velja Whitneyeva različica Mengerjevega izreka: Graf G je po točkah/povezavah $k-$povezan ntk. vsak par točk povezuje vsaj k po točkah/povezavah ločenih sprehodov.

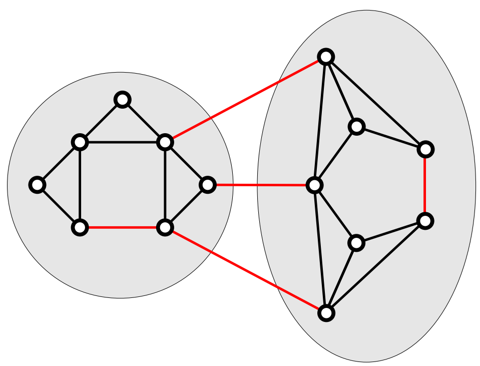
Trikotniška povezanost – neusmerjeni grafi

V neusmerjenem grafu imenujemo *trikotnik* podgraf izomorfen K_3.

Zaporedje trikotnikov $(T_1, T_2, \ldots, T_s)$ grafa G *(točkovno) trikotniško povezuje* točki $u, v \in \mathcal{V}$ ntk. $u \in T_1$ in $v \in T_s$ ali $u \in T_s$ in $v \in T_1$ ter $\mathcal{V}(T_{i-1}) \cap \mathcal{V}(T_i) \neq \emptyset$, $i = 2, \ldots s$; in *povezavno trikotniško povezuje* točki $u, v \in \mathcal{V}$ ntk zadošča še strožji različici zadnjega pogoja $\mathcal{E}(T_{i-1}) \cap \mathcal{E}(T_i) \neq \emptyset$, $i = 2, \ldots s$.

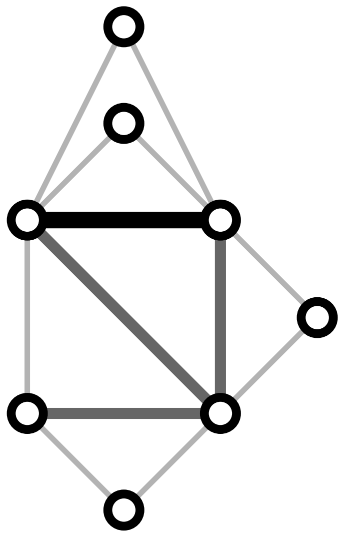






Točkovna trikotniška povezanost je enakovrednost na točkah; povezavna pa na povezavah. Članek.

Trikotniško omrežje

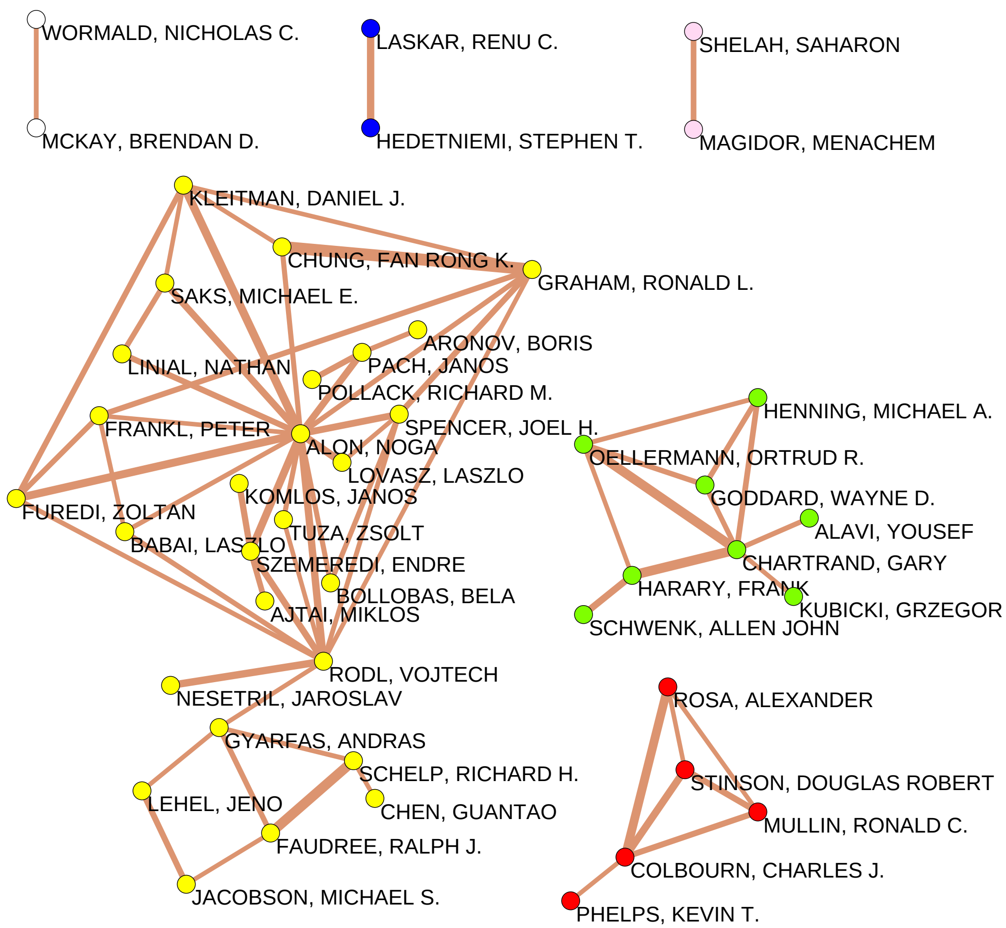


Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ enostaven neusmerjen graf. Prirejeno *trikotniško omrežje* $\mathcal{N}_T(\mathcal{G}) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T, w)$ določeno z $\mathcal{G}$ je podgraf $\mathcal{G}_T = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_T)$ grafa $\mathcal{G}$, kjer je E_T množica tistih povezav iz $\mathcal{E}$, ki leže na vsaj enem trikotniku. Utež $w(e)$ povezave $e \in \mathcal{E}_T$ je enaka številu različnih trikotnikov, ki jim povezava e pripada.

Trikotniška omrežja omogočajo učinkovito razkrivanje gostih delov omrežja. Če povezava e pripada *k-kliki* – podgrafu izomorfnemu K_k – v $\mathcal{G}$, je $w(e) \geq k - 2$.

`Net / Count / 3-Rings`

Povezavni prerez na ravni 16 trikotniškega omrežja Erdős-ovega grafa sodelovanj



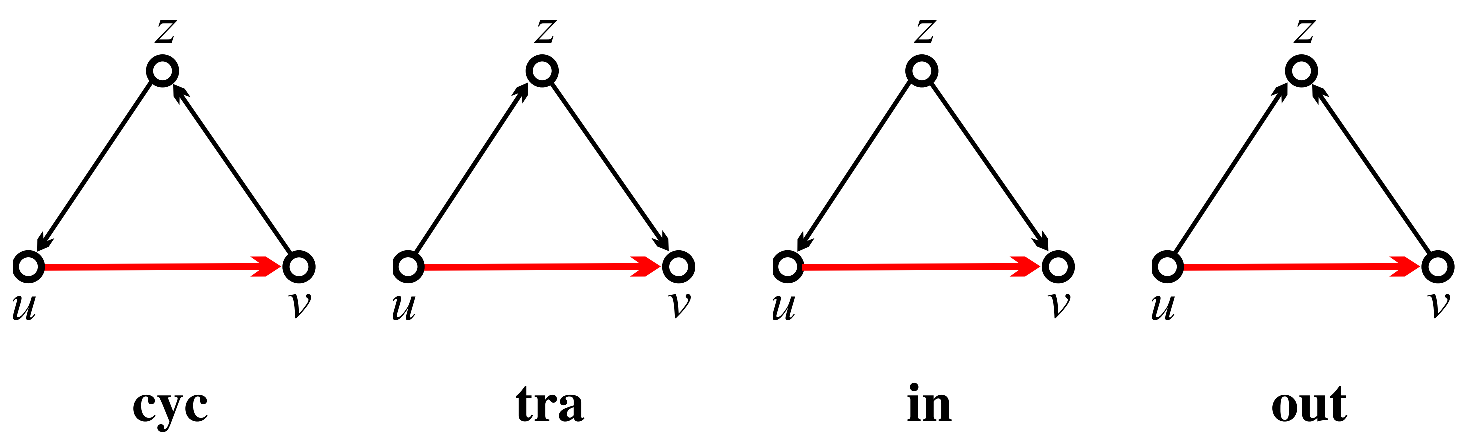
brez Erdősa,

$n = 6926$,

$m = 11343$

Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

Če je graf $\mathcal{G}$ mešan, zamenjamo neusmerjene povezave s pari nasprotno usmerjenih. Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ enostaven usmerjen graf brez zank. Za izbrano usmerjeno povezavo $(u, v) \in \mathcal{A}$ obstajajo štiri vrste *usmerjenih trikotnikov*: **cyc**lic, **tra**nsitive, **in**put in **out**put.



. . . Trikotniška povezanost – usmerjeni grafi

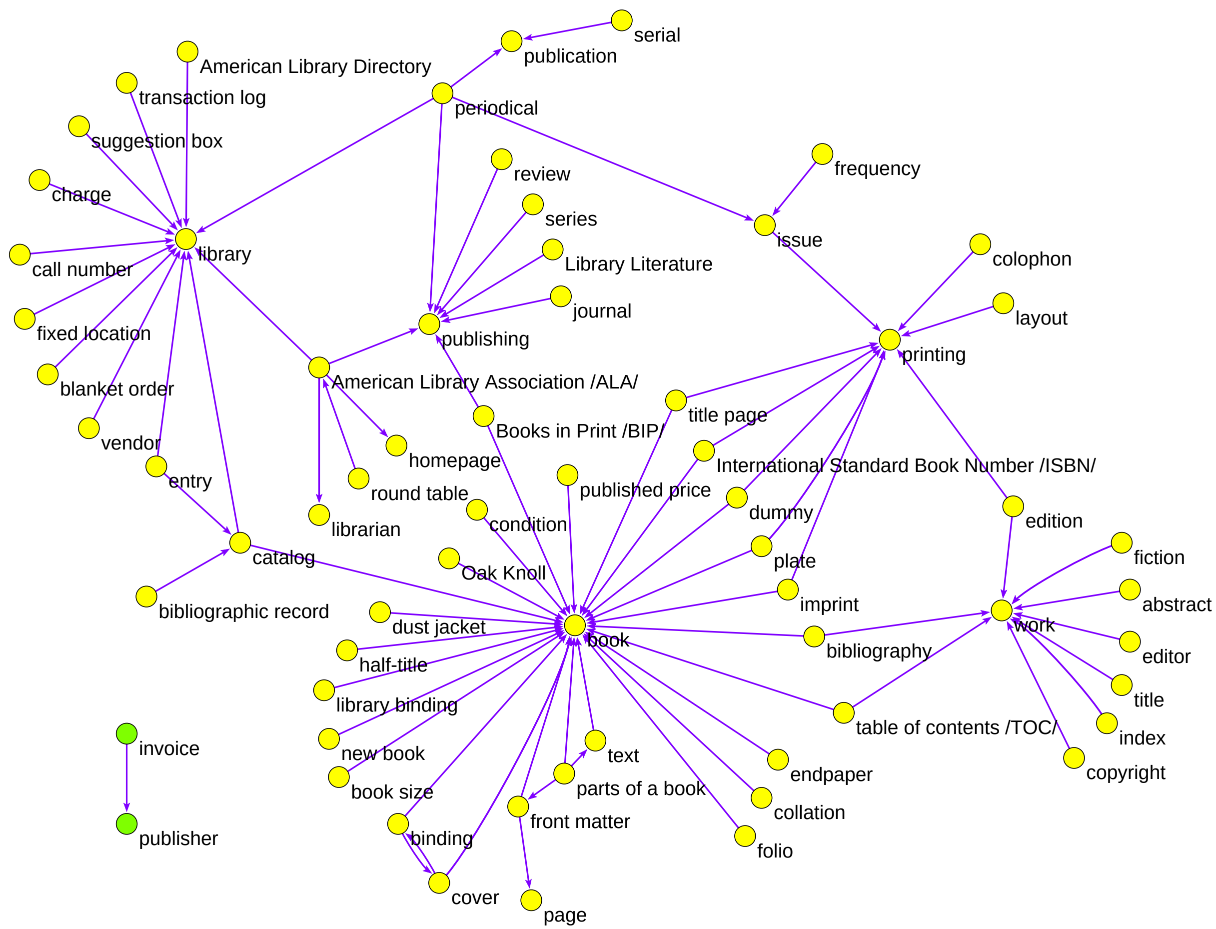
Če pozabimo na vlogo izbrane povezave, imamo le dve vrsti trikotnikov, ki jim povezava lahko pripada: ciklične (**cyc**) in tranzitivne (**tra**, **in**, **out**). V programu **`Pajek`** ukaz

`Net / Count / 3-Rings`

omogoča določiti ustrezna omrežja ($\mathcal{N}_{cyc}$ – ciklične uteži, $\mathcal{N}_{tra}$ – tranzitivnostne uteži, $\mathcal{N}_{sc}$ – tranzitivne bližnjice).

Pojem trikotniške povezanosti lahko posplošimo na *povezanost s kratkimi (pol)cikli – obroči* in ustrezna omrežja.

Povezavni prerez na ravni 11 tranzitivnega trikotniškega omrežja slovarja ODLIS



Pomembne točke v omrežju

Pri izgradnji *mer pomembnosti* moramo najprej upoštevati ali je omrežje usmerjeno ali neusmerjeno. Meram pomembnosti na neusmerjenih omrežjih pravimo mere *središčnosti*; na usmerjenih omrežjih pa mere *veljave*. Slednje se naprej delijo na mere *ugleda* ali *podpore* (upoštevamo vstopajoče povezave) in mere *vpliva* (upoštavamo izstopajoče povezave).

Če zamenjamo dano usmerjeno omrežje z njemu nasprotnim (obrnemo smeri povezav) preidejo mere ugleda v mere vpliva, in obratno.

Dejanski pomen mere pomembnosti je odvisen od relacije (omrežja). Tako npr. je 'najuglednejša' oseba glede na relacijo '__ ne mara sodelovati z __' dejansko najmanj priljubljena oseba.

Odstranitev pomembne točke iz omrežja povzroči občutno spremembo v zgradbi/delovanju omrežja.

Normalizacija

Naj bo $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ neka mera pomembnosti točk omrežja $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$. Če želimo vrednosti mere p primerjati med različnimi omrežji, moramo poskrbeti za primerljivost. Pogosto jo poskušamo zagotoviti tako, da mero p *normaliziramo*.

Naj bo $\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})$, kjer je $\mathbf{N}(\mathcal{V})$ izbrana množica omrežij nad isto množico $\mathcal{V}$,

$$p_{max} = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \max_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v) \qquad \text{in} \qquad p_{min} = \min_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} \min_{v \in \mathcal{V}} p_{\mathcal{N}}(v)$$

Tedaj je normalizirana mera enaka

$$p'(v) = \frac{p(v) - p_{min}}{p_{max} - p_{min}} \in [0, 1]$$

Stopnje

Najpreprostejšo mero pomembnosti predstavljajo stopnje točk. Ker sta za enostavna omrežja $\deg_{min} = 0$ in $\deg_{max} = n - 1$, je ustrezna normalizirana mera

središčnost $$\deg'(v) = \frac{\deg(v)}{n-1}$$

in podobno

ugled $$\text{indeg}'(v) = \frac{\text{indeg}(v)}{n}$$

vpliv $$\text{outdeg}'(v) = \frac{\text{outdeg}(v)}{n}$$

Namesto stopenj glede na osnovno omrežje lahko vzamemo tudi stopnje glede na relacijo dosegljivosti (tranzitivna ovojnica).

`Net / Partitions / Degree`

`Net / Partitions / Domain`

Dostopnost

Če upoštevamo razdalje $d(u, v)$ med točkami v omrežju $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ lahko vpeljemo

polmer $r(v) = \max_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Količino $D = \max_{u,v \in \mathcal{V}} d(v, u)$ imenujemo *premer* omrežja.

skupna dostopnost $S(v) = \sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)$

Za usmerjeno omrežje sta vpeljani meri meri vpliva. Meri ugleda dobimo, če v obrazcih $d(u, v)$ zamenjamo z $d(v, u)$.

Če omrežje ni krepko povezano, sta r_{max} in S_{max} enaki ∞. Sabidussi (1966) je zato kot mero dostopnosti vpeljal $1/S(v)$ oziroma v normalizirani obliki

dostopnost $$cl(v) = \frac{n-1}{\sum_{u \in \mathcal{V}} d(v, u)}$$

`Net / Vector / Centrality / Closeness`

Vmesnost

Pomembne so tudi točke, ki lahko nadzirajo pretok podatkov po omrežju. Če privzamemo, da so za prenos pomembne le najkrajše poti, dobimo kot mero *vmesnosti* (Anthonisse 1971, Freeman 1977)

$$b(v) = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{\substack{u,t \in \mathcal{V}: g_{u,t} > 0 \\ u \neq v, t \neq v, u \neq t}} \frac{g_{u,t}(v)}{g_{u,t}}$$

kjer je $g_{u,t}$ število najkrajših poti iz u v t; in $g_{u,t}(v)$ število takih med njimi, ki gredo skozi točko v.

`Net / Vector / Centrality / Betweenness`

Kazala in vsebine

Točkam povezanega usmerjenega omrežja $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, \mathcal{L})$ priredimo dve vrednosti: kakovost vsebine x_v in kakovost kazala y_v (Kleinberg, 1998).

Na dobro vsebino kažejo dobra kazala in dobro kazalo kaže na dobre vsebine

$$x_v = \sum_{u:(u,v)\in\mathcal{L}} y_u \qquad \text{in} \qquad y_v = \sum_{u:(v,u)\in\mathcal{L}} x_u$$

Naj bo $\mathbf{W}$ matrika omrežja $\mathcal{N}$ in $\mathbf{x}$ ter $\mathbf{y}$ vektorja obeh lastnosti. Tedaj lahko zvezi zapišemo $\mathbf{x} = \mathbf{W}^T\mathbf{y}$ oziroma $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$.

Začnimo z $\mathbf{y} = [1, 1, \ldots, 1]$ in nato zaporedoma izračunamo po obeh zvezah nove približke za $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$. Oba vektorja po vsakem koraku normaliziramo. To ponavljamo dokler se vektorja ne ustalita.

Pokazati je mogoče, da opisani postopek konvergira. Limitni vektor $\mathbf{x}^*$ je glavni lastni vektor matrike $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$; $\mathbf{y}^*$ pa matrike $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$.

. . . Kazala in vsebine

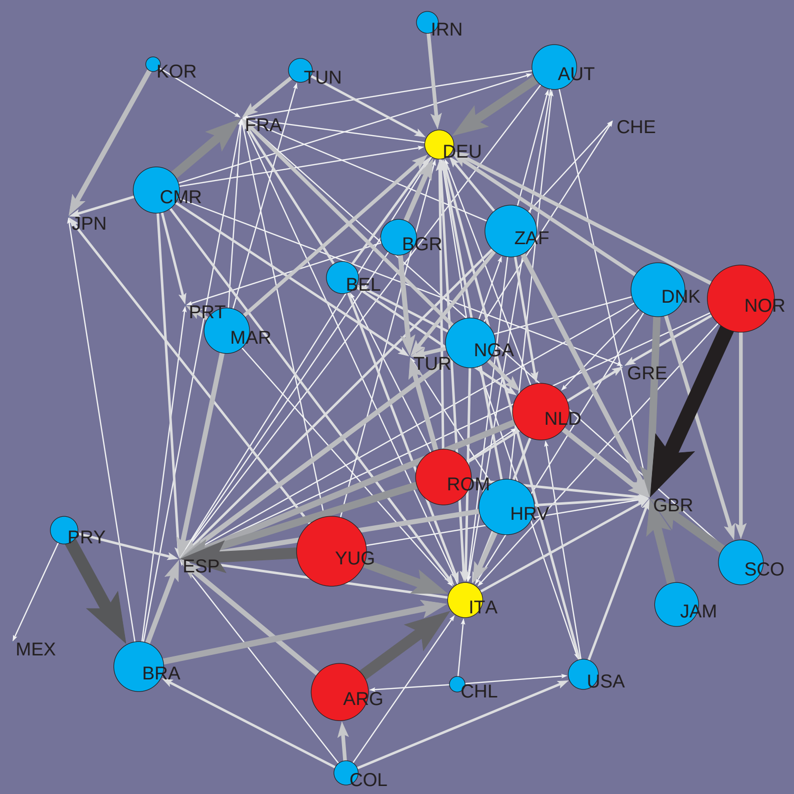
Podobni postopki se uporabljajo v spletnih iskalnikih za ocenjevanje pomembnosti posameznih strani.

PageRank, PageRank / Google, HITS / AltaVista, SALSA, teorija.

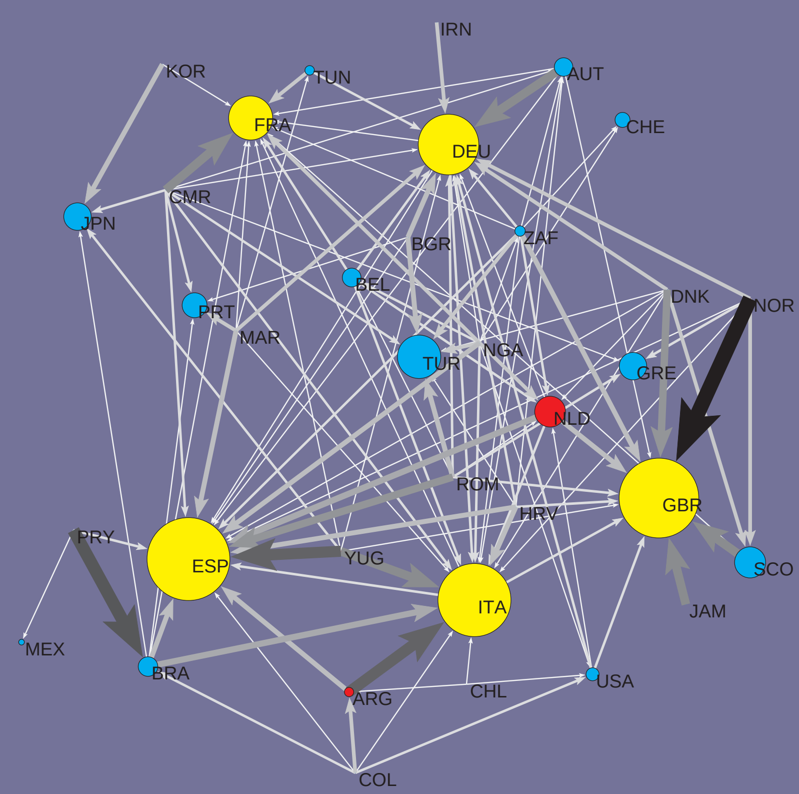
`Net / Vector / Important Vertices / 1-Mode: Hubs & Authorities`

Na svetovnem nogometnem prvenstvu v Parizu leta 1998 je sodelovalo 22 nogometnih reprezentanc. V omrežju so vse države, iz katerih so nogometaši igrali v ligah teh 22 držav, in vse države, v katerih ligah so igrali nogometaši iz teh 22 držav. Relacija je *igralec iz države x igra v državi y*; utež je število takih igralcev. Podatke je zbral Lothar Krempel. `football.net`

... Kazala in vsebine: nogometaši



Izvozniki (kazala/hubs)



Uvozniki (vsebine/authorities)

Nakopičenost

Nakopičenost v točki v je določena kot razmerje med številom vseh povezav v podgrafu $G^1(v)$ porojenim s soseščino dane točke in številom povezav v polnem grafu na teh točkah

$$C(v) = \frac{2|\mathcal{L}(G^1(v))|}{\deg(v)(\deg(v)-1)}$$

za $\deg(v) > 1$; in $C(v) = 0$ sicer.

Vpliv velikosti soseščine lahko zagotovimo z naslednjim popravkom

$$C_1(v) = \frac{\deg(v)}{\Delta} C(v)$$

kjer je Δ največja stopnja v grafu G. Ta doseže največjo možno vrednost le na točkah, ki pripadajo osamljeni kliki reda Δ.

`Net / Vector / Clustering Coefficients / CC1`

Usredinjenost omrežja

Mero pomembnosti $p : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ lahko povzamemo na celotnem omrežju kot njegovo usredinjenost $C(p)$:

$$p^* = \max_{v \in \mathcal{V}} p(v)$$

$$D(p) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (p^* - p(v))$$

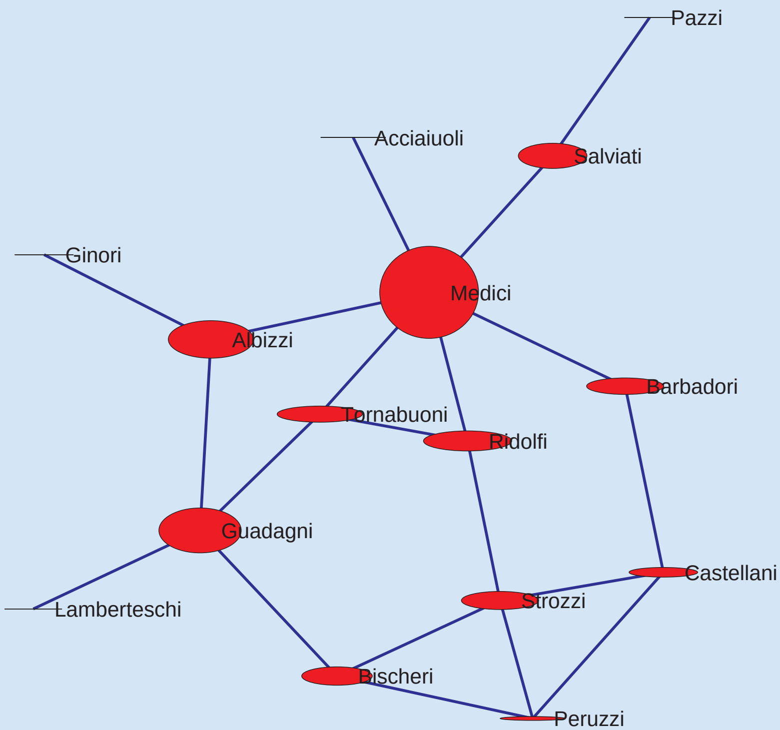
$$D^* = \max_{\mathcal{N} \in \mathbf{N}(\mathcal{V})} D(p_{\mathcal{N}})$$

Tedaj je *usredinjenost* glede na p

$$C(p) = \frac{D(p)}{D^*}$$

Za večino mer je najbolj usredinjena zvezda S_n in najmanj polni graf K_n.

Padgett-ove floretinske rodbine



		close	between
1.	Acciaiuoli	0.368421	0.000000
2.	Albizzi	0.482759	0.212454
3.	Barbadori	0.437500	0.093407
4.	Bischeri	0.400000	0.104396
5.	Castellani	0.388889	0.054945
6.	Ginori	0.333333	0.000000
7.	Guadagni	0.466667	0.254579
8.	Lamberteschi	0.325581	0.000000
9.	Medici	0.560000	0.521978
10.	Pazzi	0.285714	0.000000
11.	Peruzzi	0.368421	0.021978
12.	Ridolfi	0.500000	0.113553
13.	Salviati	0.388889	0.142857
14.	Strozzi	0.437500	0.102564
15.	Tornabuoni	0.482759	0.091575