

Poglavje 3

Zakoni razvoja

Zapiski so še v pripravi.

3.1 Razvoj kvantitativnega modela

- določitev *ciljev* in *merljivih* ter *lastnih* (izpeljanih) *spremenljivk* modela (neodvisne – odvisne spremenljivke);
- strukturiranje zvez med spremenljivkami;
- določitev oblike posameznih zvez;
- določitev (ocene) vrednosti parametrov;
- uporaba modela pri analizi problema; analiza ustreznosti, občutljivosti, tveganja.

3.2 Porazdelitve

Na tip porazdelitve lahko sklepamo iz narave problema. Dober pregled porazdelitev in povezanosti med njimi najdemo v [?, str. 20].

Momenti r -te stopnje

diskretne porazdelitve

$$\mu'_r = \sum_{k=0}^{\infty} k^r p_k$$

zvezne porazdelitve

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r g(x) dx$$

Središčni momenti r -te stopnje

diskretne porazdelitve

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^r p_k$$

zvezne porazdelitve

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r g(x) dx$$

$$\mu_2 = \sigma^2.$$

Če je porazdelitev simetrična so momenti sodega reda enaki 0.

programska podpora - priprava podatkov - glajenje in risanje - določanje tipa
- določanje parametrov - Pearson

3.2.1 Porazdelitve Pearsona

Družina porazdelitvenih krivulj Pearsona zadošča diferencialni enačbi za gostoto porazdelitve $g(x)$ oblike

$$\frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{a+x}{c_0 + c_1x + c_2x^2}$$

Parametre c_0, c_1, c_2 in a določimo iz podatkov. Naj bodo m_1, m_2, m_3 in m_4 momenti porazdelitve. Če prestavimo koordinatno izhodišče v povprečno vrednost m_1 , lahko parametre določimo iz zvez:

$$\begin{aligned} \sqrt{b_1} &= \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} & b_2 &= \frac{m_4}{m_2^4} \\ d &= 2(5b_2 - 6b_1 - 9) & a &= \frac{1}{d} \sqrt{m_2 b_1} (b_2 + 3) \\ c_0 &= \frac{1}{d} m_2 (4b_2 - 3b_1) & c_1 &= a \\ c_2 &= \frac{1}{d} (2b_2 - 3b_1 - 6) \end{aligned}$$

Tako na primer gostota normalne porazdelitve $N(\mu, \sigma)$ zadošča enačbi

$$\frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{x - \mu}{\sigma^2}$$

Tip krivulje je odvisen od korenov imenovalca. Obstaja okrog 20 vrst krivulj.

Z integriranjem diferencialne enačbe dobimo

$$\ln g(x) = -\int \frac{a+x}{c_0 + c_1x + c_2x^2} dx$$

Integracijsko konstanto določimo iz pogoja

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

V nekaterih primerih tudi numerično.

Oglejmo si nekeje tipov:

3.2.2 Tip I. Pozitivni in negativni koren.

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 = -c_2(\alpha + x)(\beta - x), \quad \alpha, \beta > 0$$

Desno stran diferencialne enačbe izrazimo v obliki:

$$-\frac{a+x}{c_0+c_1x+c_2x^2} = \frac{A}{\alpha+x} + \frac{B}{\beta-x}$$

Koeficienta A in B določimo po metodi nedoločenih koeficientov. Dobimo

$$\ln g(x) = A \ln(\alpha + x) - B \ln(\beta - x) + C$$

oziroma

$$g(x) = K(\alpha + x)^A(\beta - x)^{-B}$$

3.2.3 Tip IV. Kompleksna korena.

Imenovalec ima kompleksne korene:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 = c_2((x - \alpha)^2 + \beta^2)$$

Števec izrazimo v obliki $x + a = x - \alpha + \gamma$. Tedaj lahko desno stran diferencialne enačbe zapišemo v obliki:

$$-\frac{a+x}{c_0+c_1x+c_2x^2} = \frac{-2(x-\alpha)}{2c_2((x-\alpha)^2+\beta^2)} - \frac{\gamma}{c_2\beta} \frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Dobimo

$$\ln g(x) = \frac{-1}{2c_2} \ln((x-\alpha)^2 + \beta^2) - \frac{\gamma}{c_2\beta} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$$

oziroma

$$g(x) = K((x-\alpha)^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2c_2}} \left(e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}\right)^{-\frac{\gamma}{c_2\beta}}$$

3.2.4 Tip VI. Različna negativna korena.

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 = c_2(x + \alpha)(x + \beta), \quad 0 < \alpha < \beta$$

Desno stran diferencialne enačbe izrazimo v obliki:

$$-\frac{a+x}{c_0 + c_1x + c_2x^2} = \frac{A}{x + \alpha} + \frac{B}{x + \beta}$$

Dobimo

$$\ln g(x) = A \ln(x + \alpha) + B \ln(x + \beta) + C$$

oziroma

$$g(x) = K(x + \alpha)^A(x + \beta)^B$$

3.3 Funkcijske zveze

Imamo množico podatkov

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, n, \quad x_i \in \mathbb{R}^k, \quad y_i \in \mathbb{R}$$

ki jih želimo izraziti s funkcijsko zvezo $y = f(x)$.

Za to je lahko več razlogov:

- povzetje podatkov (redukcija, interpolacija, aproksimacija ...);
- poenostavitev (zamena) zapletenih obrazcev z enostavnimi;
- opis naravnih zakonitosti;
- iskanje naravnih zakonitosti;
- ocenjevanje parametrov;
- določanje neznane vrednosti: vrednost v sredini, napovedovanje;

Zato

- (neobvezno) vrednosti y_i zgladimo – odstranimo naključne vplive – šum;
- izberemo obliko zveze – družino dopustnih funkcij;
- izberemo kriterij prileganja funkcije podatkom in glede nanj izberemo najboljšo priležnico;
- analiziramo, ovrednotimo dobljeno rešitev; po potrebi postopek ponovivimo.

V nadaljevanju se bomo pretežno, predvsem v ponazoritvah, omejili na funkcije ene spremenljivke.

3.3.1 Ali sta količini sploh funkcijsko povezani?

Entropija

Naj bo $p(X) = (p(x_i))_{i=1}^n$ verjetnostna porazdelitev lastnosti X . Entropija porazdelitve $p(X)$ imenujemo količino

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \lg p(x_i)$$

kjer je $\lg \equiv \log_2$ in velja $p = 0 \Rightarrow p \lg p = 0$.

Velja ocena

$$0 \leq H(X) \leq \lg n$$

Entropija doseže spodnjo mejo za izrojene porazdelitve $p(x_k) = 1$; $p(x_i) = 0$, $i \neq k$ in zgornjo mejo za enakomerno porazdelitev $p(x_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$. Torej lahko vpeljemo *relativno entropijo*

$$h(X) = \frac{H(X)}{\lg n}$$

z vrednostmi na intervalu $[0, 1]$. Ta nam omogoča tudi primerjavo porazdelitev z različnim številom stanj (enostavnih dogodkov).

Imejmo lastnosti X in Y s porazdelitvama $p(X)$ in $p(Y)$ ter skupno porazdelitvijo $p(XY)$. Tedaj je *informacija* med lastnostima X in Y določena z izrazom

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \lg \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$$

ki jo lahko, če upoštevamo

$$\sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) = p(x_i) \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) = p(y_j)$$

zapišemo

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$$

Pokazati je mogoče, da velja

$$H(X) + H(Y) \geq H(XY) \geq \max(H(X), H(Y))$$

Od tu izhaja

$$0 \leq I(X, Y) \leq \min(H(X), H(Y))$$

Informacija $I(X, Y)$ doseže vrednost 0 natanko takrat, ko za vsak par i, j velja $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$; kar pomeni verjetnostno neodvisnost lastnosti X in Y .

Drugo skrajnost dobimo v primeru, ko obstaja med X in Y funkcijska zveza – v vsakem stolpcu in vsaki vrstici porazdelitve $p(XY)$ je največ en od nič različen člen. Tedaj velja

$$H(X) = H(Y) = H(XY) = I(X, Y)$$

Torej je informacija $I(X, Y)$ mera funkcijske odvisnosti (določenosti) med lastnostima X in Y . Pri tem velja poudariti, da je definirana za vsa vrste merskih lestvic.

Raiski je leta 1964 vpeljal za mero povezanosti lastnosti X in Y koeficient

$$R(X \leftrightarrow Y) = \frac{I(X, Y)}{H(XY)}$$

ki ima tudi usmerjeno obliko

$$R(X \rightarrow Y) = \frac{I(X, Y)}{H(Y)}$$

Oba koeficienta zavzemata vrednosti na intervalu $[0, 1]$ in imata vrednost 0, ko sta lastnosti verjetnostno neodvisni. $R(X \rightarrow Y) = 1$, ko je Y funkcija X -a; $R(X \leftrightarrow Y) = 1$, ko obe lastnosti ena drugo natanko določata.

Pogojna entropija in informacija

Naj bo A nek dogodek. Tedaj imenujemo *pogojna entropija* lastnosti X pri pogoju A entropijo pogojne porazdelitve $p(X/A)$

$$H(X; A) = - \sum_{i=1}^n p(x_i/A) \lg p(x_i/A)$$

V posebnem primeru, ko je $A \equiv y_j$, meri $H(X; y_j)$ nedoločenost lastnosti X pri pogoju, da ima lastnost Y vrednost y_j .

Od tu dobimo mero za povprečno pogojno entropijo lastnosti X glede na Y

$$H(X; Y) = \sum_{j=1}^m p(y_j) H(X; y_j)$$

ki jo lahko zapišemo tudi takole

$$H(X; Y) = - \sum_{j=1}^m p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i/y_j) \lg p(x_i/y_j) =$$

in, ker je $p(A/B) = p(AB)/p(A)$,

$$= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \lg \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = H(XY) - H(Y)$$

Pokazati je mogoče, da velja $H(X; Y) \geq H(X; YZ)$. To upoštevamo naprej v $I(X, Y) + H(X; Y) = (H(X) + H(Y) - H(XY)) + (H(XY) - H(Y)) = H(X)$

Torej je

$$H(X) = I(X, Y) + H(X; Y) \quad \text{in} \quad H(Y) = I(X, Y) + H(Y; X)$$

Prvo zvezo lahko preberemo: Celotna nedoločenost lastnosti X je enaka vsoti pojasnjene in preostale nedoločenosti.

Informacijo med lastnostima X in Y pri pogoju A je enaka

$$\begin{aligned} I(X, Y; A) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p((x_i, y_j)/A) \lg \frac{p((x_i, y_j)/A)}{p(x_i/A)p(y_j/A)} \\ &= H(X; A) + H(Y; A) - H(XY; A) \end{aligned}$$

in povprečna informacija med X in Y pri znanih vrednostih Z

$$\begin{aligned} I(X, Y; Z) &= \sum_{s=1}^k p(z_s) I(X, Y; z_s) = \\ &= \sum_{s=1}^k p(z_s) (H(X; z_s) + H(Y; z_s) - H(XY; z_s)) = \\ &= H(X; Z) + H(Y; Z) - H(XY; Z) = \\ &= (H(XZ) - H(Z)) + (H(YZ) - H(Z)) - (H(XYZ) - H(Z)) = \\ &= H(XZ) + H(YZ) - H(Z) - H(XYZ) \end{aligned}$$

Pokazati je mogoče, da vpeljava nove lastnosti poveča informacijo med X in ostalimi upoštevanimi lastnostmi

$$\begin{aligned} I(X, YZ) - I(X, Y) &= \\ &= (H(X) + H(YZ) - H(XYZ)) - (H(X) + H(Y) - H(XY)) = \\ &= (H(XY) - H(Y)) - (H(YZ) - H(XYZ)) = \\ &= H(X; Y) - H(X; YZ) \geq 0 \end{aligned}$$

Pokažimo še zanimivo zvezo med vsemi tremi oblikami (parno, skupinsko in delno) informacije

$$\begin{aligned} I(X, Y; Z) &= H(XZ) + H(YZ) - H(Z) - H(XYZ) = \\ &= (H(X) + H(YZ) - H(XYZ)) - (H(X) + H(Z) - H(XZ)) = \\ &= I(X, YZ) - I(X, Z) \end{aligned}$$

Torej velja

$$I(X, Y; Z) = I(X, YZ) - I(X, Z)$$

3.3.2 Glajenje podatkov

- “na oko”;
- drseče sredine;
- eksponentno glajenje;
- spektralni postopki.

Te pristope bomo podrobneje spoznali nekoliko kasneje pri temi o časovnih vrstah.

V primerih, ko so velika nihanja v podatkih, poskušamo odkriti tendenco razvoja, tako da nihanja zgladimo, zravnamo - osnovne podatke nadomestimo s "gladkejšimi" podatki. Zelo ugodno je, da je glajenje grafično podprto. Mogoče je v ozadju celo kaka lepa analitična krivulja.

Drseča povprečja

Predpostavimo $\Delta t_k = \text{const.}$ Podzaporedja (intervale) iz m podatkov zamenjamo z njihovo aritmetično sredino. Običajno je m liho število - sredina zamenja podatek v sredi intervala. Za $m = 2s + 1$ dobimo tako novo zaporedje

$$(\bar{y}_k), \quad k = s + 1, s + 2, \dots, n - s$$

kjer je

$$\bar{y}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=k-s}^{k+s} y_j$$

Računski prijemi:

$$\bar{y}_k = \bar{y}_{k-1} + \frac{1}{m} (y_{k+s} - y_{k-s-1})$$

$$z_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k y_j, \quad \bar{y}_k = z_{k+s} - z_{k-s-1}$$

Utežena drseča povprečja

Drseče sredine so precej grob postopek, ki se ne prilagaja lokalnim značilnostim podatkov. Občutljivejše so *utežene* drseče sredine, ki temelje na polinomski aproksimaciji dela zaporedja.

$$\hat{y}_k = P(k) = a_0 + a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2 + \dots + a_m \cdot k^m$$

pri čemer točko 0 postavimo v točko, v kateri določamo vrednost (m je lih). Tedaj je $\hat{y}_k = P(0) = a_0$.

Glajenje podatkov je eno izmed področij analize podatkov, ki se nahaja na robu Glajenje ni znanost, je umetnost. Uporablja se pri pregledovanju podatkov – generiranju hipotez.

grafična metoda, oko

krivulje najboljšega prileganja, metoda najmanjših kvadratov

filtriranje Osnovna ideja: vsak izmerjeni podatek y_i poskusimo izraziti kot vsoto prave (ali osnovne) vrednosti $f(x_i)$ in napake e_i . Torej

$$y_i = f(x_i) + e_i$$

Pri tem poskušamo izbrati tak f , da bo celotna napaka čim manjša.

Če z enim glajenjem ne dobimo dovolj gladkih podatkov, postopek ponovimo.

3.3.3 Drseče sredine

$$Y_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$Y_i = \frac{1}{9}(y_{i-2} + 2y_{i-1} + 3y_i + 2y_{i+1} + y_{i+2})$$

3.3.4 Utežene sredine

V točki $t = 0$ poskušamo aproksimirati $2m + 1$ podatkov

$$y_{-m}, y_{-m+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$$

s polinomom stopnje k

$$p(t) = \sum_{s=0}^k a_s t^s$$

po metodi najmanjših kvadratov – z minimizacijo napake

$$E(p) = \sum_{t=-m}^m (y_t - p(t))^2$$

Koeficienti a_s minimalnega polinoma morajo zadoščati potrebnim pogojem za ekstrem

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_s} = \sum_{t=-m}^m (y_t - p(t)) t^s, \quad s = 0, 1, \dots, k$$

iz katerih dobimo sistem enačb za koeficiente a_s

$$\sum_{t=-m}^m y_t t^s = \sum_{t=-m}^m p(t) t^s = \sum_{r=0}^k a_r \sum_{t=-m}^m t^{r+s}, \quad s = 0, 1, \dots, k$$

Pri tem velja upoštevati, da je za lihe $r + s$

$$\sum_{t=-m}^m t^{r+s} = 0$$

Za primer določimo najboljšo parabolo skozi 5 točk ($k = 2, m = 2$). Enačbe za koeficiente imajo v tem primeru obliko:

$$\begin{aligned} 5a_0 + 10a_2 &= \sum_{t=-m}^m y_t \\ 10a_1 &= \sum_{t=-m}^m t y_t \\ 10a_0 + 34a_2 &= \sum_{t=-m}^m t^2 y_t \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe dobimo

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{35} \left(17 \sum_{t=-m}^m y_t - 5 \sum_{t=-m}^m t^2 y_t \right) \\ &= \frac{1}{35} (17(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2) - 5(4y_{-2} + y_{-1} + y_1 + 4y_2)) \\ &= \frac{1}{35} (-3y_{-2} + 12y_{-1} + 17y_0 + 12y_1 - 3y_2) \end{aligned}$$

Pokazati je mogoče, da je sta koeficienta pri y_{-s} in y_s , $s = 1, \dots, m$ enaka. To nam omogoča, da shemo zapišemo v zgoščeni obliki:

$$\frac{1}{35} [-3, 12, \mathbf{17}]$$

Na podoben način lahko izpeljemo celo vrsto shem. Naštejmo jih nekaj:

$$\begin{aligned} k = 3 \quad m = 3 & \frac{1}{21} [-2, 3, 6, \mathbf{7}] \\ k = 3 \quad m = 4 & \frac{1}{231} [-21, 14, 39, 54, \mathbf{59}] \\ k = 4 \quad m = 3 & \frac{1}{231} [5, -30, 75, \mathbf{131}] \\ k = 4 \quad m = 4 & \frac{1}{429} [15, -55, 30, 135, \mathbf{179}] \end{aligned}$$

$$Y_i = p_i(0) = a_0(i) = \frac{1}{35}(-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2})$$

Izpeljane sheme ne veljajo na robu; za prvih in zadnjih m členov. V teh primerih moramo upoštevati še enakosti za preostale koeficiente, ki jih zaenkrat nismo potrebovali.

V primeru $k = 2, m = 2$ dobimo:

$$\begin{aligned} Y_{n-1} = p_{n-2}(1) &= \frac{1}{35}(2y_{n-4} - 8y_{n-3} + 12y_{n-2} + 27y_{n-1} + 2y_n) \\ Y_n = p_{n-2}(2) &= \frac{1}{70}(-y_{n-4} + 4y_{n-3} - 6y_{n-2} + 4y_{n-1} + 69y_n) \end{aligned}$$

Za Y_1 in Y_2 dobimo žrcalne"obrazce.

3.3.5 Eksponentno glajenje

Wiener je predlagal prilagodljivo glajenje

$$\tilde{y}_k = \alpha y_k - (1 - \alpha)\tilde{y}_{k-1}$$

$$\tilde{y}_0 = y_0$$

pri čemer je $\alpha \in (0, 1]$ parameter glajenja.

Izpišimo obrazec za splošni člen

$$\tilde{y}_k = \alpha y_k + \alpha(1 - \alpha)y_{k-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{k-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^s \tilde{y}_{k-s}$$

Če je $\alpha \approx 1$, vpliv zadnjih členov hitro slabi.

Pokazati je mogoče, da je

$$E(\tilde{y}) = E(y)$$

$$D(\tilde{y}) = \frac{\alpha}{2 - \alpha} D(y)$$

Torej, ko $\alpha \rightarrow 0$ se nihanje zaporedja vse bolj duši.

V praksi običajno izbiramo $\alpha \in [0.1, 0.3]$.

Uporablja se tudi večkratno glajenje.

3.3.6 Izbira oblike

Najprej moramo izbrati obliko funkcijske zveze f – razred dopustnih funkcij \mathcal{F} . Izbor lahko opravimo na osnovi teorije – izpeljemo obliko rešitev. Obliko funkcije nam lahko predpisujejo tudi izbrana/dostopna matematična in programska orodja (linearizacija, ...). Pogosto pa zaradi pomanjkanja teorije ali drugih razlogov določimo razred na drugačen način iz *kataloga*: na oko, izkušnje, heuristika, varčnost, enostavnost, zleпки in drugi (polni) sistemi funkcij, sodila (razlike, sredine), splošne značilnosti opisovanega pojava (obnašanje v neskončnosti, ...).

Zveznost, diskretnost, ekvidistantnost.

Lagrangeov polinom – gre skozi točke, vendar vmes lahko hudo podivja. Upoštevati je potrebno tudi pričakovane značilnosti rešitve - neprehitro spreminjanje, naraščanje, limitne vrednosti.

3.3.7 Krivulje

Modeli rasti

Neomejena naravna rast

Diskretni model

$$y(x+1) = ky(x), \quad y(0) = C, \quad x \in \mathbf{N}$$

rešitev

$$y(x) = Ck^x$$

$$y(x+1) = ky(x) + p, \quad y(0) = C, \quad x \in \mathbf{N}$$

rešitev

$$y(x) = \begin{cases} k^x(C + \frac{p}{k-1}) + \frac{p}{k-1} & k \neq 1 \\ px + C & k = 1 \end{cases}$$

Zvezni model

$$\frac{dy}{dx} = sy, \quad y(0) = C, \quad x \geq 0$$

rešitev

$$y(x) = Ce^{sx}$$

OPOMBA: Če postavimo $s = \ln k$, je $k^x = e^{sx}$. Modela sta navidez enakovredna. Prvi ima za $x \in \mathbf{R}_0^+$ tudi rešitve

$$y(x) = Ck^x + z(x)$$

kjer je $z(x)$ poljubna funkcija, ki zadošča pogoju

$$z(x) = 0, \quad x \in \mathbf{N}$$

Na primer

$$z(x) = \sin 2\pi x$$

□

Omejena naravna rast Slabost obeh prejšnjih modelov je, da v naravi pojavi niso neomejeni – ne velja: $y \rightarrow \infty$, ko $x \rightarrow \infty$.

To slabost odpravljata modela:

$$\Delta y(x) = k\left(1 - \frac{y(x)}{m}\right)y(x), \quad y(0) = C, \quad x \in \mathbf{N}$$

$$\frac{dy}{dx} = s\left(1 - \frac{y}{m}\right)y, \quad y(x_0) = C, \quad x \geq x_0$$

kjer m predstavlja mejo za y .

Analiza diskretnega primera je razmeroma zapletena (glej [?] strani). Zato si bomo ogledali le zvezni model.

Diferencialno enačbo modela zapišemo v obliki

$$\frac{dy}{y} + \frac{dy}{m-y} = sdx$$

in dobimo rešitev

$$\frac{y}{m-y} = C'e^{sx} \quad \text{oziroma} \quad y = \frac{mC'}{C' + e^{-sx}}$$

Če je $s > 0$, zanjo velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = m$$

Konstanto C' določimo iz zveze $y(x_0) = C$. Dobimo:

$$C' = \frac{Ce^{-sx_0}}{m-C}$$

in dalje

$$y(x) = \frac{m}{1 - \left(1 - \frac{m}{C}\right)e^{-s(x-x_0)}}$$

Dobljeni krivulji pravimo *logistična krivulja*; Pearl, Reed 1920.

Kaj pa če se tudi zmogljivost okolja spreminja $m = m(x)$?

Lanchesterjeve enačbe

Naj bosta λ_A in λ_B zaporedoma hitrosti strelbe enot strani A in B ; $m_A(t)$ in $m_B(t)$ pa ustrezni pričakovani števili neuničenih enot v danem trenutku t . Začetni števili enot sta n_A in n_B .

Izhajamo iz predpostavke

$$\Delta m_A = -\lambda_B m_B \Delta t$$

od koder dobimo, pri $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dm_A}{dt} = -\lambda_B m_B$$

in podobno

$$\frac{dm_B}{dt} = -\lambda_A m_A$$

Če prvo zvezo še enkrat odvajamo in upoštevamo drugo, dobimo

$$\frac{d^2 m_A}{dt^2} = \lambda_A \lambda_B m_A$$

ki ima rešitev oblike

$$m_A = C_1 e^{\sqrt{\lambda_A \lambda_B} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda_A \lambda_B} t}$$

in od tu

$$m_B = -\frac{1}{\lambda_B} \frac{dm_A}{dt} = \sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda_B}} (C_2 e^{-\sqrt{\lambda_A \lambda_B} t} - C_1 e^{\sqrt{\lambda_A \lambda_B} t})$$

Iz začetnih števil enot $m_A(0) = n_A$ in $m_B(0) = n_B$ določimo še

$$C_1 = \frac{1}{2} (n_A - n_B \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}}) \quad C_2 = \frac{1}{2} (n_A + n_B \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}})$$

Vpeljimo nove oznake

- $\nu = \frac{n_A}{n_B}$ – razmerje sil;
- $\alpha = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ – razmerje hitrosti strelbe;
- $\eta = \nu \sqrt{\alpha}$ – premoč strani A nad B ;
- $\tau = \sqrt{\lambda_B \lambda_A} t$ – relativni čas;
- $\mu_x = \frac{m_x}{n_x}$, $x = A, B$ – delež preživelih.

pa lahko Lanchesterjeve enačbe zapišemo

$$\mu_A = \operatorname{ch} \tau - \frac{1}{\eta} \operatorname{sh} \tau \quad \mu_B = \operatorname{ch} \tau - \eta \operatorname{sh} \tau$$

3.3.8 Gostota naseljenosti mesta

Clarkov krožni model

$$D = Ae^{-bx}$$

x – oddaljenost od središča, A – gostota v središču, b – strnjenost/kompaktnost pozidave.

Če Clarkov obrazec logaritmiramo in diferenciramo, dobimo najprej

$$\ln D = -bx + \ln A$$

in dalje

$$\frac{dD}{dx} = -bD$$

Recimo, da imamo dve točki x_1 in x_2 , $x_1 < x_2$. Tedaj lahko iz prve zveze dobimo oceni za koeficienta

$$-b = \frac{\ln D_1 - \ln D_2}{x_1 - x_2} \quad A = D_1^{\frac{x_2}{x_2 - x_1}} D_2^{\frac{x_1}{x_1 - x_2}}$$

Clarkov model ima več posplošitev. Žarkovni model $D = D(r, \varphi)$. Medvedkov (1965) je predlagal model $A = A(\varphi)$ in $x = rb(\varphi)$. Ozadje tega modela je mesto z enim središčem, v katerega vodijo glavne poti – vpadnice. Ob teh poteh je gostota večja.

Še splošnejši model sta podala Gurevič in Sauškin (1966). Naj bo T hitrost padanja gostote vzdolž žarka φ

$$T = -\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial r}$$

Predpostavljamo, da je $T(r, \varphi) \geq 0$. Iz enačbe dobimo

$$D = D_0 e^{-\int_0^r T dr}$$

S tem obrazcem lahko ocenimo številčnost prebivalstva v poljubnem območju mesta Ω kot

$$N(\Omega) = \int \int_{\Omega} D(r, \varphi) r dr d\varphi = D_0 \int \int_{\Omega} r e^{-\int_0^r T dr} dr d\varphi$$

Vrste

- $T = const$ – Clarkov tip mesta;
- $T = T(\varphi)$ – Medvedkov tip mesta;
- $T = T(r)$;
- $T = U(r)V(\varphi)$;
- $T = T(r, \varphi)$ – splošni tip mesta.

3.3.9 Gravitacijski modeli mednarodne trgovine

3.3.10 Cobb-Douglasova funkcija produktivnosti

Naj bo O produktivnost (output) podjetja (rudnika), C vložena sredstva (capital) in L delovna sila (labor force) ter $k > 0$, $0 < \gamma < 1$ konstanti tedaj velja

$$O = kC^\gamma L^{1-\gamma}$$

3.3.11 Zipf-Mandelbrotov zakon

Imamo besednjak urejen po padajočih relativnih frekvencah p_i , $i = 1, \dots, n$. Tedaj obstajajo konstante $k, \gamma > 0$ in ρ , tako da je

$$p_i = k(i + \rho)^{-\gamma}$$

Zipf je ugotovil, da za večino naravnih jezikov velja za porazdelitev besed $k \sim 0.1$, $\gamma \sim 1$, $\rho = 0$.

Nekaj primerov

vzorec	1000 N	γ	ρ	k
angleščina, proza	260	1.04	?	0.13
francoščina, elektrotehnika	200	0.98	?	0.119
nemščina, elektrotehnika	200	0.99	1.59	0.10
ruščina, elektrotehnika	200	0.84	1.90	0.14
češčina, literatura	1500	1.04	1.35	0.132

Podobni zakoni (za dovolj velike N)

$$m(F, N) = g(N)F^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha > 0$$

Množica označenih objektov. $m(F, N)$ je število oznak, ki se pojavijo natanko F krat v vzorcu N objektov.

Pareto - velikost osebnega dohodka.

Ribištvo

Funkcija rasti: von Bertalanffy (1938)

$$l = L_\infty(1 - e^{-K(t-t_0)})$$

l – velikost; t – čas; L_∞ – asimptotična velikost; t_0 – čas velikosti 0 (majhno negativno).

Funkcija rasti: Gompertz (1825)

$$W_t = W_0 e^{G(1-e^{-gt})}$$

W – teža.

Funkcija prirastka (obnove): Beverton-Holt (1956)

$$R = \frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{P}}$$

P – številčnost starševske populacije; R – številčnost zaroda (nove generacije).

Funkcija prirastka – Gama: Saito-Lorda (1980)

$$R = \alpha P^\gamma e^{-\beta P}$$

Prvi del izraža rodnost, drugi pa vplive gostote. Za $\gamma = 1$ dobimo Rickerjevo funkcijo prirastka (1958).

Funkcija prirastka: Sheperd (1982)

$$R = \frac{\alpha P}{1 + (\frac{P}{K})}^\beta$$

α – rodnost; $\beta > 0$ – gostota; K – značilni delež populacije.

(Alometrična) funkcija rasti

$$W = aL^b$$

W – teža; L – dolžina; praviloma je za ribe $b \in [2.5, 3.5]$.

Zlepki**Standardne krivulje rasti**

Opisujejo zakonitosti razvoja pojava v času. Lahko za krivuljo vemo iz teorije; lahko pa samo želimo modelirati dane podatke z zahtevano natančnostjo.

Osnovni tipi:

- premica

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot t$$

- parabola

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$$

- polinomi

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_m \cdot t^m$$

- logaritmična

$$y(t) = \log_a t$$

- eksponentna

$$y(t) = a b^t$$

- logaritmična parabola

$$y(t) = a b^t c^{t^2}$$

- premaknjena eksponentna

$$y(t) = c + a b^t$$

- Gompertzova krivulja

$$y(t) = c a^{b^t}$$

- logistična krivulja

$$y(t) = \frac{c}{1 + b e^{f(t)}}$$

Obstaja še vrsta drugih. Običajno logistično krivuljo dobimo, če postavimo $f(t) = -a \cdot t$.

Kako izberemo, katera funkcija je najustreznejša? Poglejmo metodo značilnih prirastkov. Iz danega zaporedja (zglajenega) izračunamo značilne količine

$$v_k = \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$w_k = \Delta y_k = \dots$$

in odločimo takole:

Če je količina (skoraj) konstantna je krivulja:

v_k	premica
Δv_k	parabola
$\Delta^m y_k$	polinom stopnje m
v_k/y_k	eksponentna
$\Delta(v_k/y_k)$	logaritmična parabola
$\Delta(\log v_k)$	premaknjena eksponentna
$\Delta(\log(v_k/y_k))$	Gompertzova krivulja
$\Delta(\log(v_k/y_k^2))$	logistična krivulja

Včasih so problemi z logaritmi negativnih števil. Delno se jim lahko izognemo s povečanim glajenjem ali zrcaljenjem (?).

Kako izbrati ? Včasih izhaja iz teorije pojava. (Včasih omejimo možne tipe). Prva metoda je vizualna - iz grafične predstavitve. Druga pot - končne diference. (Včasih na zglajenem zaporedju)

Lahko uporabimo tudi kakšno natančnejšo formulo za odvod (prirastek).

Hitrost

$$v_k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

$$v_k^{(s)} = \left(\frac{d^s y}{dx^s}\right)_k$$

Parabola: $v^{(2)} = const$

Eksponentna: $v = \frac{dy}{dx} = ab^x \ln b = y \ln b$ torej je $\frac{v_k}{y_k} = const.$

Podobno za ostale.

Nato iz razreda dopustnih funkcij \mathcal{F} izberemo tisto, ki se najbolje prilega našim podatkom

Pristopi:

- dan je razred funkcij; določi tisto, ki se najbolje prilega podatkom;
- dana je zahtevana natančnost; določi čim enostavnejšo funkcijo (načelo varčnosti - čim manj parametrov)

Napaka

$$y_k = f(x_k) + \varepsilon_k$$

Dve fazi

- izbor tipa krivulje
- določitev parametrov

Delne napake združimo v celotno napako $E(f)$ na več načinov

$$E_1(f) = \sum_k |\varepsilon_k|$$

$$E_2(f) = \sum_k \varepsilon_k^2$$

$$E_3(f) = \max_k |\varepsilon_k|$$

Namesto napake ε_k bi lahko izbrali tudi kako drugo mero odstopanja funkcije od podatkov – na primer *ortogonalno* (pravokotno) napako ϱ_k .

Najpogosteje se uporablja metoda najmanjših kvadratov. Njena velika prednost je, da v nekaterih primerih omogoča analitično določitev rešitve; njena glavna slabost pa je, da je močno občutljiva na podatke, ki močno odstopajo od krivulje. Zato zadnje čase vse pogosteje uporabljajo tudi metodo absolutnih odstopanj, ki je precej robustnejša.

Utežena metoda najmanjših kvadratov

$$E(a) = \sum_i w_i \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i (f(x_i, a) - y_i)^2$$

Upoštevanje natančnosti meritev $y_i \pm \sigma_i$ tedaj $\varepsilon'_i = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$

$$E'(a) = \sum_i (\varepsilon'_i)^2 = \sum_i \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \varepsilon_i^2$$

Torej $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$.

Relativna napaka: $y_i = f(x_i)(1 + \delta_i)$

$$\delta_i = \frac{y_i - f(x_i)}{f(x_i)} \approx \frac{y_i - f(x_i)}{y_i} \Rightarrow w_i = \frac{1}{y_i^2}$$

Tujki.

Metoda najmanjših kvadratov.

Diskretni model / zvezni model. Diskretni model praviloma z enakim korakom – lahko privzamemo celoštevilski interval.

Cooke, 389 - MNK je osnovana na Gauss-Markovem izreku. Grafika !!!

3.4 Regresijska premica

$$y = f(x, a, b) = ax + b$$

Po metodi najmanjših kvadratov poskusimo določiti koeficienta a in b tako, da bo celotna napaka

$$E(a, b) = \sum_{k=1}^n w_k (ax_k + b - y_k)^2$$

najmanjša. Kot vemo iz optimizacije, lahko določimo parametra a in b kot rešitev sistema enačb

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

oziroma

$$\begin{aligned} a \sum w_k x_k^2 + b \sum w_k x_k &= \sum w_k x_k y_k \\ a \sum w_k x_k + b \sum w_k &= \sum w_k y_k \end{aligned}$$

Uvedimo $w = \sum w_k$ in

$$\bar{x} = \frac{1}{w} \sum w_k x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{w} \sum w_k y_k, \quad \overline{xy} = \frac{1}{w} \sum w_k x_k y_k, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{w} \sum w_k x_k^2$$

pa dobimo

$$\begin{aligned} a\overline{x^2} + b\bar{x} &= \overline{xy} \\ a\bar{x} + b &= \bar{y} \end{aligned}$$

Sistem ima enolično rešitev

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

v kateri E doseže najmanjšo vrednost. Enačbo regresijske premice lahko zapišemo tudi v obliki

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

Označimo

$$S_{xy} = \sum w_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = w(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$$

$$S_{xx} = \sum w_k (x_k - \bar{x})^2 = w(\overline{x^2} - \bar{x}^2)$$

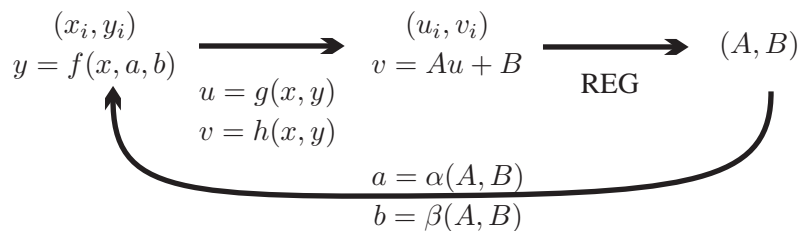
Torej velja tudi

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum w_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum w_k (x_k - \bar{x})^2}$$

Pokazati je mogoče, da je σ modela

$$\sigma^2 = \frac{S_{yy} - aS_{xy}}{n - 2}$$

3.4.1 Uporaba regresijske premice



Primer: Za $y = \frac{ax}{b+x}$ dobimo

$$\underbrace{\frac{x}{y}}_v = \frac{b+x}{a} = \underbrace{\frac{1}{a}}_A \underbrace{x}_u + \underbrace{\frac{b}{a}}_B$$

$f(x, a, b)$	u	v	a	b
$y = ax + b$	x	y	A	B
$y = \frac{1}{ax+b}$	x	$\frac{1}{y}$	A	B
$y = \frac{a}{x} + b$	$\frac{1}{x}$	y	A	B
$y = \frac{x}{ax+b}$	x	$\frac{x}{y}$	A	B
$y = \frac{ax}{x+b}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$
$y = ax^b$	$\ln x$	$\ln y$	e^A	B
$y = ab^x$	x	$\ln y$	e^A	e^B
$y = ab^{\frac{1}{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\ln y$	e^A	e^B
$y = \frac{1}{a+be^{-x}}$	e^{-x}	$\frac{1}{y}$	A	B

Späth je predlagal naslednjo pot za aproksimacijo z $y = f(x, a, b)$ v primeru, ko znamo enega od parametrov iz enačb

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = 0$$

dobiti analitično. Recimo, da znamo iz ene enačbe izraziti $a = a(b)$. Tedaj vstavimo ta izraz v drugo enačbo in dobimo enačbo $F(b) = 0$, ki je odvisna le od b . Določimo rešitev b – na primer z numeričnim postopkom za iskanje ničel. Par $(a(b), b)$ je iskana rešitev.

Metoda najmanjših kvadratov za krivulje z nekaj linearnimi parametri

V nekaterih primerih v funkciji $f(x)$ nastopajo posamezni parametri linearno. Te lahko analitično izločimo, preostale pa določimo računsko.

Kot primer si oglejmo funkcijo oblike

$$f(x; a, b) = ag(x; b)$$

Tedaj je

$$E = \sum w_i (f(x_i) - y_i)^2 = \sum w_i (ag(x_i; b) - y_i)^2$$

s pogojem minimalnosti

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a} = 0 &= 2 \sum w_i (ag(x_i; b) - y_i) g(x_i; b) \\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0 &= 2 \sum w_i (ag(x_i; b) - y_i) g_1(x_i; b)\end{aligned}$$

kjer je $g_1(x_i; b) = \frac{\partial}{\partial b} g(x; b)$.

Iz prve enačbe izrazimo a kot funkcijo b ja

$$a = a(b) = \frac{\sum w_i y_i g(x_i; b)}{\sum w_i g(x_i; b)^2}$$

iz druge enačbe pa dobimo funkcijo

$$D(b, a) = \sum w_i (ag(x_i; b) - y_i) g_1(x_i; b)$$

b je ničla te funkcije pri danem a ju.

Rešitev (a^* , b^*) določimo z razpolavljanjem (bisekcijo):

izberi b_l ; b_r ;

$a_l := a(b_l)$; $a_r := a(b_r)$; $D_l := D(b_l, a_l)$; $D_r := D(b_r, a_r)$;

repeat

$b_s := \frac{1}{2}(b_l + b_r)$; $a_s := a(b_s)$; $D_s := D(b_s, a_s)$;

if $D_l D_s < 0$ **then begin** $b_r := b_s$; $D_r := D_s$ **end**

else begin $b_l := b_s$; $D_l := D_s$ **end**

until $|b_r - b_l| < \varepsilon$;

$b^* := \frac{1}{2}(b_r + b_l)$; $a^* := a(b^*)$;

3.4.2 Posplošitve

Pogosto uporabljamo tudi modela:

$$f(x, a_1, a_2, \dots, a_s) = \sum a_k \varphi_k(x)$$

kjer so $\varphi_k(x)$ linearno neodvisne funkcije.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum a_k x_k$$

V primeru nelinearnih modelov uporabimo računalnik – Marquardtov postopek.

3.4.3 Analiza ostanka

Ko izberemo najboljšo priležnico $f^*(x)$, lahko narišemo graf ostanka $\varepsilon_k = y_k - f^*(x_k)$. Če je slika ostanka naključna – ostanki so naključno porazdeljeni okrog osi in vzdolž osi enako razpršeni smo nalogo opravili; če pa so v sliki ostanka opazne kake pravilnosti, ostanek najbrž skriva neupoštevane sestavine.

V sliki ostanka se pogosto jasno pokažejo tujki in drugi odstopajoči podatki.

V primeru, ko se razpršenost spreminja vzdolž osi, govorimo o heteroskedastičnosti. Pogosto je lahko odpravimo s transformacijo osi y .

Zaporedje predznakov ostankov mora biti tudi naključno – sicer imamo opravka z avtokorelacijo.

Filtriranje !!!

Modeli

Deskriptivni, opisni – Kako se kaj (bo) obnaša(lo) ?

Preskriptivni, normativni, optimizacija – Kako naj se nekaj (idealno) obnaša ?

3.5 Časovne vrste

Časovno vrsto sestavljajo vrednosti slučajne spremenljivke v danem časovnem obdobju. Na primer:

- ekonomija: dnevna prodaja, letna poraba energije, ... ;
- naravoslovje: gibanje temperature, plimovanje, ... ;
- družboslovje: rojstva, selitve,

Po naravi izvora delimo časovne vrste na *zvezne* in *diskretne*. Iz zvezne vrste z *odtipavanjem* (pogosto enakokoračnim) dobimo diskretno časovno vrsto.

Delimo jih tudi na

- *deterministične*: vrednost v danem trenutku se podreja neki zakonitosti – lega urinega nihala – sinusoida;
- *stohastične*: naslednje vrednosti so le delno določene z dosedanjimi.

Pri stohastičnih časovnih vrstah nimamo dobre predstave o procesih v ozadju. Napoved naslonimo na domnevo, da bo obnašanje v bodoče podobno obnašanju v preteklosti (stalnost ali vsaj gladko spreminjanje mehanizma). Pogosto se ta predpostavka poruši: spremembe v okolju, vladni ukrepi, ...

Metode napovedovanja vrednosti delnic so moderna inačica spreminjanja svinca v zlato.

Ljudje najdemo vzorce tudi v povsem naključnih pojavih.

3.5.1 Sestavine časovnih vrst

Običajno poskušamo dano časovno vrsto razstaviti na naslednje sestavine:

- *trend* T : opisuje dolgoročno gibanje povprečja. Opišemo ga s krivuljo trenda – tirnico.
- *ciklična nihanja* C : opisujejo dolgoročna nihanja trenda. Na primer v ekonomiji: razcvet, nazadovanje, upadanje, okrevanje, ... Ta nihanja niso vedno periodična.
- *sezonska nihanja* S : periodične spremembe glede na trenutek v periodi (mesec/leto, dan/teden, ura/dan, ...). Velja $S_{t+p} = S_t$, p je perioda.
- *motnje* R : nepravilne spremembe. Lahko so naključne (šum ρ , običajno normalno porazdeljen) ali pa tudi ne (nesreče, ukrepi, ...). Motnje so lahko včasih tako močne, da povzročijo spremembe v ostalih sestavinah – spremenijo mehanizem vrste.

Včasih opazujemo trend skupaj s cikličnimi nihanji – to združeno sestavino označimo z Z . Obstaja več načinov združevanja naštetih sestavin v model časovne vrste.

- *aditivni*: $y = T + C + S + R$
- *mešani*: $y = ZS + R$
- *multiplikativni*: $y = ZSR$

Z glajenjem ali prileganjem določimo oceni za trend in sezonska nihanja. Ostanek vsebuje motnje in ciklični prispevek.

3.5.2 Napovedovanje

Naj bo y_t izmerjena vrednost vrste v trenutku $t = 1, 2, 3, \dots$ in \tilde{y}_t napovedana vrednost za trenutek t . Tedaj z $\varepsilon_t = y_t - \tilde{y}_t$ označimo *ostanek* ali napako napovedi.

Učinkovitost nekega postopka napovedovanja merimo običajno ali s *povprečnim kvadratnim odstopanjem*

$$MSE = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i^2$$

ali pa s *povprečno absolutno napako*

$$MAD = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |\varepsilon_i|$$

Če so ostanki ε_t normalno porazdeljeni, je

$$\sqrt{MSE} \approx 1.25MAD$$

Meri MSE in MAD uporabljamo za ocenjevanje natančnosti napovedi, pa tudi za izbiro parametrov uporabljene metode napovedovanja. V ta namen na podatkih za preteklo obdobje uporabimo izbrano metodo pri različnih vrednostih parametrov. Izberemo tisti nabor parametrov, ki da najmanjšo napako napovedi. Včasih, če imamo dovolj dolgo vrsto, lahko pri določanju parametrov metode uporabimo načelo *deli in vladaj*: parametre določimo na srednji polovici vrste, prva četrtina nevtralizira probleme začetka, na zadnji četrtini pa metodo preskusimo.

Večkrat vpeljemo še *slednik* (tracking signal)

$$K_t = \frac{1}{MAD_t} \sum_{i=1}^t \varepsilon_t$$

Če je $|K_t| \geq 4$, metoda slabo sledi vrsti – potrebno je popraviti parametre ali zamenjati metodo napovedovanja.

Sezonski indeks I povezuje tekočo sezonsko spremembo s pripadajočo vrednostjo na tirnici

$$I_t = \frac{y_t}{Z_t}$$

Poglejmo si nekaj metod napovedovanja:

Zadnja vrednost

Za napoved vzamemo, kar zadnjo vrednost

$$\tilde{y}_{t+1} = y_t$$

Če je skupni trend Z konstanten, ni sezonskih nihanj in je R šum, je to najboljša ocena.

Drseča povprečja

Uporabimo prijem, ki smo ga že spoznali pri glajenju funkcijskih vrednosti:

$$\tilde{y}_{t+1} = \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{t-i}, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

le, da imajo praviloma prvi koeficienti $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ večjo težo.

Navadno eksponentno glajenje

Že Wiener, in za njim še Holt ter Brown, so predlagali prilagodljivo glajenje

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\tilde{y}_t = \tilde{y}_t + \alpha \varepsilon_t$$

pri čemer je $\alpha \in (0, 1]$ parameter glajenja. Priporočljivo je, da je $\alpha \leq 0.3$, običajno $\alpha \approx 0.1$.

Problem začetka. Najpogosteje za \tilde{y}_1 vzamemo kar y_1 ali neko (zunanjo) oceno za to vrednost. Drug pristop je, da najprej izberemo običajno vrednost parametra glajenja α , vrednost parametra v obrazcu pa spreminjamo po pravilu

$$\alpha_t = \begin{cases} \frac{1}{t} & \frac{1}{t} > \alpha \\ \alpha & \text{sicer} \end{cases} \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Tedaj za člene s spremenljivim parametrom velja

$$\tilde{y}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y_i$$

Slaba stran eksponentnega glajenja je, da je vselej $\tilde{y}_{t+1} \leq y_t$ – vselej zaostaja za naraščajočim trendom.

Izpišimo obrazec za splošni člen

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^s \tilde{y}_{t-s}$$

Če je $\alpha \approx 1$, vpliv zadnjih členov hitro slabi.

Pokazati je mogoče, da je

$$E(\tilde{y}) = E(y) \quad \text{in} \quad D(\tilde{y}) = \frac{\alpha}{2 - \alpha} D(y)$$

ter

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{in} \quad D(\varepsilon_t) = \frac{2}{2 - \alpha} D(y)$$

Torej, ko $\alpha \rightarrow 0$ se nihanje zaporedja vse bolj duši.

Navadno eksponentno glajenje ima enak učinek na vrsto kot drseče povprečje z $\alpha_i = \frac{1}{n}$, kjer je n določen iz enačbe

$$(n + 1)\alpha = 2$$

Vzporedno z glajenjem zaporedja, lahko računamo tudi oceno napake

$$MAD_{t+1} = \alpha |\varepsilon_t| + (1 - \alpha) MAD_t$$

Uporablja se tudi večkratno glajenje.

Linearni trend

Model: $y_t = a + bt + \rho_t$

Naj bo Z_t zglajena raven trenda in b_t popravek trenda

$$Z_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(Z_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(Z_t - Z_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$$

$$\tilde{y}_{t+m} = Z_t + mb_t$$

Začetna Z_1 in b_1 določimo iz starih podatkov ali na osnovi ocen iz začetnih podatkov.

Konstantni trend s sezonskim nihanjem

Model: $y_t = aI_t + \rho_t$, $I_{t+p} = I_t$, kjer je p perioda in I_t ocena sezonskega indeksa

$$Z_t = \alpha \frac{y_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)Z_{t-1}$$

$$I_t = \gamma \frac{y_t}{Z_t} + (1 - \gamma)I_{t-p}$$

$$\tilde{y}_{t+m} = Z_t I_{t-p+m}$$

Začetne I_i določimo na primer iz prvih p vrednosti

$$I_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^p y_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Tipične vrednosti $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.2$.

Konstantni trend s sezonskim nihanjem

Model: $y_t = (a + bt)I_t + \rho_t$

$$Z_t = \alpha \frac{y_t}{I_{t-p}} + (1 - \alpha)(Z_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(Z_t - Z_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$$

$$I_t = \gamma \frac{y_t}{Z_t} + (1 - \gamma)I_{t-p}$$

$$\tilde{y}_{t+m} = (Z_t + mb_t)I_{t+m-p}$$

Začetne vrednosti določimo tako, kot pri prejšnjih dveh metodah.

3.5.3 Druge metode

Box-Jenkins ARIMA(p,d,q)

Spektralne metode.