Zbirka (deloma) rešenih nalog iz operacijskih raziskav

Druga poskusna izdaja[1],

namenjena izključno kot pomoč študentom
pri predmetu *operacijske raziskave* na FER
v študijskem letu 1996/97

Naklada: 30 izvodov

Avtorja:
Vladimir Batagelj, prof. dr. mat.
Matjaž Kaufman, mag. rač. dipl. ing. mat.

[1] Avtorja ne jamčita za pravilnost rešitev.
Nekatere naloge se sklicujejo na podatke na datotekah. Ti podatki se ne distribuirajo skupaj z zbirko, ampak jih bodo študentje lahko dobili posebej.

1. Naloge

1.1 Merske lestvice, smiselnost stavkov in merjenje koristnosti

1.1 Ali je izjava

(1) $f(a) + f(b) > f(c)$

(2) $f(a) = 2f(b)$

smiselna, če je lestvica f

a) razmernostna

b) razmična

1.2 Naj bo (F, S, f) urejenostna lestvica. Katere od izjav:

a) $f(a) + f(b) > f(c)$

b) $f(a).f(b) > f(c)$

c) $f(a) \neq f(b)$

so smiselne? Odgovor utemelji !

1.3 Naj bo f lestvica. Kakšne vrste (imenska, urejenostna, razmična, razmernostna, absolutna) mora biti, da bo stavek

a) $f(a) + f(b) > f(c) + f(d)$

b) $\max(f(a), f(b)) > \max(f(c), f(d))$

smiseln?

1.4 Primerjamo para oseb (a,b) in (A,B) glede na lastnost q, ki je:

(a) q(X) = višina osebe X

(b) q(X) = čas rojstva osebe X (število glede na koledarski sistem, npr. število dni od začetka štetja)

(c) q(X) = izobrazba osebe X (na primer 0 = nedokončana osnovna šola, 1 = osnovnošolska izobrazba, 2 = poklicna šola itd.)

Kateri od stavkov

(A) $q(a)q(b) < q(A)q(B)$

(B) $q(a) + q(b) < q(A) + q(B)$

(C) $\max(q(a), q(b)) < \max(q(A), q(B))$

so smiselni v posameznih primerih?

1.5 A in B sta omejeni podmnožici $\mathbb{R}$. Za katere lestvice je smiseln stavek

$$\max_{a\in A} f(a) - \min_{a\in A} f(a) > \max_{b\in B} f(b) - \min_{b\in B} f(b)$$

1.6

a) Ali je smiseln stavek:
Razlika v ceni med najdražjim in najcenejšim fotografskim aparatom je večja od cene najdražjega športnega kolesa.

b) Ali je smiseln stavek:
Do Bohinja je vsaj dvakrat dlje kot do Kamnika.

c) Naj bo (Φ, Σ, f) lestvica. Za končno neprazno množico objektov X naj bo

$$D(X) = \max_{x\in X} f(x) - \min_{x\in X} f(x)$$

razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo izmerjeno na množici X.

Za katere vrste lestvic je za dani končni neprazni množici A in B smiseln stavek: $2D(A) > D(B)$?

1.7

a) Ali je smiseln stavek:
Razlika v ceni med najdražjim in najcenejšim fotografskim aparatom je večja od razlike v ceni med najdražjim in najcenejšim športnim kolesom.

b) Ali je smiseln stavek:
Danes je bila najvišja temperatura v Sidneyu vsaj dvakrat višja od najvišje današnje temperature v Reykjaviku.

c) Naj bo (Φ, Σ, f) lestvica. Za končno neprazno množico objektov X naj bo

$$D(X) = \max_{x\in X} f(x) - \min_{x\in X} f(x)$$

razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo izmerjeno na množici X.

Za katere vrste lestvic je za dani končni neprazni množici A in B smiseln stavek: $D(A) > D(B)$?

1.8 Na vzorcu A z n elementi in vzorcu B z m elementi smo na vsakem elementu izmerili neko lastnost glede na lestvico f (recimo težo rastlin na dveh različno gnojenih njivah). Za katere lestvice je smiseln stavek (izjava):

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(a_i)} > \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} f(b_i)}$$

Odgovor utemelji !

1.9 Merska lestvica je *logaritemsko razmična*, če so dopustne transformacije oblike αx^β, kjer sta $\alpha, \beta > 0$. Kateri od stavkov so smiselni za logaritemsko razmično lestvico f:

a) $f(a) > f(b)$,

b) $f(a) = 2f(b)$,

c) $A(a,b) \leq A(c,d)$,

d) $G(a,b) \leq G(c,d)$,

kjer je $A(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v))$ in $G(u,v) = \sqrt{f(u)f(v)}$?
Predstavi z Vennovim diagramom odnose med standardnimi merskimi lestvicami in logaritemsko razmično lestvico.

1.10 Za zaporedje meritev $\mathbf{a} = \{ \ a_i \ : \ i = 1..|A| \ \}$ na končni neprazni množici A definiramo

$$N(\mathbf{a}) = \frac{|\{ \ x \ : \ x \in \mathbf{a} \ \wedge \ x > \frac{\max a_i + \min a_i}{2} \ \}|}{|A|}$$

Za katere lestvice je smiseln stavek $N(\mathbf{a}) > N(\mathbf{b})$ kjer sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ zaporedji meritev, opravljenih na končnih nepraznih množicah, A in B?

1.11

a) Ali je smiseln stavek: Druga svetovna vojna je trajala dlje kot prva svetovna vojna.

b) Moj oče je bolj izobražen kot tvoj. Moja mama je manj izobražena kot tvoja. Moja mama je bolj izobražena kot moj oče. Ali je smiseln stavek: Razlika v izobrazbi mojih staršev je večja kot razlika v izobrazbi tvojih staršev.

c) Naj bo (Φ, Σ, f) lestvica in

$$D(u,v) = \frac{f(u)^2 - f(v)^2}{2f(u)f(v)}$$

Za katere vrste lestvic je smiseln stavek: $D(a,b) > D(c,d)$.

1.12

a) Ali je smiseln stavek: Med kriminalci v ZDA je največ Italijanov.

b) Ali je smiseln stavek: Nihanja temperature so poleti v gorah dvakrat večja kot ob morju.

c) Naj bo (Φ, Σ, f) lestvica in $A \subseteq \Phi$ končna množica. Označimo

$$m_f = \min\{f(x) : x \in A\} \qquad \text{in} \qquad M_f = \max\{f(x) : x \in A\}$$

ter

$$N(x) = \frac{f(x) - m_f}{M_f - m_f}$$

Za katere vrste lestvic je smiseln stavek: $N(x) > N(y)$, pri čemer sta $x, y \in A$.

1.13 Naj bo f razmična lestvica. Ali je smiseln stavek

$$\sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(f(a_i) - \overline{f_a})^2} \;>\; \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(f(b_i) - \overline{f_b})^2}$$

kjer je

$$\overline{f_a} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \;\text{ in }\; \overline{f_b} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(b_i)$$

ter je $n > 1$.

1.14 Skupina ljudi se odloča, kam naj gre v kino. Danes so na sporedu filmi Lepotica in zver, Lovčeva poteza, Osmi potnik[3], Poslednji Mohikanec, Prvinski nagon, Sam doma. Sestavili so naslednjo tabelo, ki podaja relacijo R: aRb (oziroma $R_{a,b} = 1$) je enakovredno temu, da se je več članov skupine odločilo za film a kot za film b.

	Lepotica in zver	Lovčeva poteza	Osmi potnik[3]	Poslednji Mohikanec	Prvinski nagon	Sam doma
Lepotica in zver	0	0	0	0	1	0
Lovčeva poteza	1	0	0	0	1	0
Osmi potnik[3]	1	1	0	1	1	1
Poslednji Mohikanec	1	0	0	0	1	0
Prvinski nagon	0	0	0	0	0	0
Sam doma	1	1	0	1	1	0

a) Ali obstaja za relacijo R funkcija koristnosti? Če obstaja, kateri film naj izberejo?

b) Kaj pa, če bi si Lovčevo potezo in Osmega potnika[3] želelo ogledati enako število ljudi (in bi bila zato oba ustrezna matrična elementa 0)?

1.2 Porazdelitve

2.1 Polkilogramska konzerva mora vsebovati vsaj 48 dag snovi, da jo proglasimo za ustrezno. Stroj polni konzerve s povprečjem 50 dag snovi in standardnim odklonom 1.2 dag, pri čemer je teža vsebine porazdeljena normalno. Kolikšno je pričakovano število neustreznih konzerv med 1000 izdelanimi konzervami?

2.2 Prodajalec je za dani artikel zbral naslednje podatke o porazdelitvi dnevne prodaje:

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0.06	0.06	0.18	0.35	0.22	0.11	0.02

Pri vsakem prodanem kosu ima dobiček 3250 donarjev. Določi pričakovani dnevni dobiček in njegov standardni odklon.

2.3 Prodajalec v semenarni ponuja kmetu Tomažu seme nove sorte hibridne koruze. Trdi, da je kaljivost njegovega semena vsaj 95%. Tomaž želi sam preizkusiti kaljivost semena, zato mu prodajalec dovoli, da si izbere vzorec, na katerem bo sam preizkusil kaljivost. Tomaž naključno izbere dvajset semen, od teh pa jih vzkali šestnajst. Ali naj verjame prodajalčevi trditvi o kaljivosti semena? Odgovor utemelji s tem, da izračunaš verjetnost, da med dvajset naključno izbranimi semeni s kaljivostjo 95% ni več kot šestnajst kaljivih semen.

2.4 V tovarni avtomobilov *Samohod* na podlagi dosedanje prodaje domnevajo, da bo povpraševanje po njihovem modelu *Zajček* v naslednjem letu porazdeljeno po normalnem zakonu $N(57500, 8750)$. Povprečna prodajna cena vozila je 3750 donarjev. Za preživetje mora tovarna na *Zajčkih* doseči letno prodajo vsaj 150 000 000 donarjev. Kolikšna je verjetnost, da bo pri tem uspela?

2.5 Prodajalec je za dani artikel zbral naslednje podatke o porazdelitvi dnevne prodaje:

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0.06	0.06	0.18	0.35	0.22	0.11	0.02

Pri vsakem prodanem kosu ima dobiček 3250 donarjev. Določi pričakovani dnevni dobiček in njegov standardni odklon.

2.6 V slaščičarni, ki je odprta 14 ur dnevno, prodajo dnevno v povprečju po 8 *Zmajčkovih tort*. Koliko tort morajo imeti vsak dan na začetku na zalogi, če naj bodo 75 odstotno gotovi, da jim čez dan *Zmajčkovih tort* ne bo zmanjkalo?

Privzemi, da za povpraševanje velja Poissonov model.
Ali je ta predpostavka smiselna?

2.7 Število živorojenih na 1000 prebivalcev (nataliteta) v Sloveniji je za razdobje desetih let naslednje:

1981	15,2
1982	15,0
1983	14,1
1984	13,5
1985	13,1
1986	12,9
1987	12,9
1988	12,6
1989	11,7
1990	11,2

a) Izračunajte tričlenske drseče sredine.

b) Izračunajte linearni trend natalitete.

c) Kolikšno nataliteto bi lahko napovedali za leto 1991?

1.3 Aproksimacija in glajenje

3.1 Množico točk $(x_i, y_i), i = 1, ..., n$ želimo opisati (aproksimirati) s krivuljo oblike

$$y(x; a, b) = \frac{a}{1 + bx}$$

po metodi najmanjših kvadratov.

a) Kakšnim zvezam morata zadoščati parametra a in b?

b) Kako bi določil njuni vrednosti?

3.2 Skozi dano množico točk $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, ...n\}$, ki predstavljajo meritve, želimo potegniti krivuljo oblike

$$y = \frac{ax^2 + b}{x}$$

po metodi najmanjših kvadratov. Določi obrazce za izračun koeficientov a in b.

3.3 Dano je zaporedje podatkov $\{ (x_i, y_i);\ i = 0..n \}$. Domnevamo, da velja zveza $y_i - y_{i-1} = ax_i + b(x_i - x_{i-1})$. Po metodi najmanjših kvadratov določi koeficienta a in b.

3.4 V investicijski sklad si vložil nek znesek denarja za daljše obdobje, ko denarja niti ne vlagaš niti ne dviguješ. Sklad ti pošilja mesečna poročila o trenutni vrednosti naloženega denarja $\{ v_i \ :\ i = 0, 1, ...n \}$, kjer je i števec mesecev od trenutka, ko si denar naložil. Površen pogled ti pokaže, da se vrednost vloženega podvaja približno v enakih časovnih obdobjih.

a) S katero (dvoparametrično) družino krivulj bi aproksimiral vrednost vloženega denarja v odvisnosti od časa? Izbiro utemelji.

b) Kako bi določil parametra, da se bo krivulja "čim bolj natančno" prilegala podatkom? Zapiši formulo za izračun parametrov.

3.5 Dani sta zaporedji točk v ravnini $\{ (x_i, y_i) \ :\ i = 1, 2, ...n \}$ in $\{ (x'_i, y'_i) \ :\ i = 1, 2, ...n \}$. Radi bi drugo zaporedje točk zavrteli okrog koordinatnega izhodišča
$x''_i \ = \ x'_i \cos\varphi \ - \ y'_i \sin\varphi$
$y''_i \ = \ x'_i \sin\varphi \ + \ y'_i \cos\varphi$
tako, da bo vsota kvadratov evklidskih razdalj točk zavrtenega zaporedja do enako indeksiranih točk prvega zaporedja $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x''_i)^2 + (y_i - y''_i)^2$ čim manjša.

Določi parameter φ optimalnega zasuka. Ne pozabi utemeljiti, da je pri izračunanem φ zares dosežen minimum.

Naloga za dodatne točke: Kaj veš povedati o sistemih točk v primeru, ko optimalen φ ni enolično določen?

3.6 Na datoteki `POHISTAN.XLS` so shranjeni podatki o odvisnostih med prodanimi stoli *Triglav* (prvi stolpec) in številom zgrajenih stanovanj (drugi stolpec) v obdobju enega leta na danem območju.

Za naslednje leto je načrtovana izgradnja 310 stanovanj. Koliko stolov *Triglav* naj v trgovskem podjetju naročijo za naslednje leto?

3.7 Na datoteki `POVPRA.XLS` so shranjeni podatki o povpraševanju po telovadnih copatih v zadnjih letih. Za vsako leto imamo podatke za štiri tromesečja. Napovej povpraševanje za naslednja štiri tromesečja:

a) z uporabo eksponentnega glajenja na podatkih za posamezno tromesečje;

b) z uporabo Winterjevega postopka za časovne vrste.

Določi čim boljše vrednosti parametrov glajenja. Podatke in rešitve tudi grafično prikaži.

3.8 Na datoteki `CD.XLS` so shranjeni podatki iz *Consumer Reports Buying Guide, 1991* o odvisnostih med ocenami (prvi stolpec) in prodajno ceno (drugi stolpec) za "CD player"-je.

Vaša trgovina namerava prodajati nov model "CD player"-ja, ki je dobil oceno 91. Kolikšna je primerna prodajna cena zanj?

3.9 Na datoteki `NESRECE.XLS` so shranjeni podatki o smrtnih prometnih nesrečah v zadnjih letih. Za vsako leto imamo podatke za štiri tromesečja. Napovej števila smrtnih prometnih nesreč za naslednja štiri tromesečja:

a) z uporabo eksponentnega glajenja na podatkih za posamezno tromesečje;

b) z uporabo Winterjevega postopka za časovne vrste.

Določi čim boljše vrednosti parametrov glajenja. Podatke in rešitve tudi grafično prikaži.

1.4 Odločitvene tabele

4.1 Prodajalec prigrizkov na nogometni tekmi jih lahko naroči v bližnji restavraciji vnaprej po 20 denot za kos. Če mu jih med tekmo zmanjka, pa so mu jih pripravljeni takoj dostaviti po 30 denot za kos. Koliko prigrizkov naj naroči, če ocenjuje:

št. kupcev	50	60	70	80	90	100
p	0.20	0.15	0.30	0.10	0.15	0.10

4.2 Janez prodaja na nogometni tekmi prigrizke po 40 denot za kos. Prigrizkov ne pripravlja sam. V bližnji restavraciji jih lahko naroči vnaprej po 20 denot za kos. Če mu jih med tekmo zmanjka, pa so mu jih pripravljeni takoj dostaviti po 30 denot za kos. Koliko prigrizkov naj naroči, če ocenjuje:

št. kupcev	50	60	70	80	90	100
p	0.10	0.15	0.30	0.20	0.15	0.10

Neprodane prigrizke lahko vrne v restavracijo in dobi 15 denot za kos.

4.3 Prodajalec časopisov Janez prodaja časopise na križišču med Beograjsko in Zagrebško cesto. Vsak dan se mora odločiti, koliko časopisov naj naroči. Za vsak naročen časopis plača 0.20 donarja, za vsak prodan časopis pa iztrži 0.25 donarja. Za neprodane časopise ne dobi povrnjenega denarja. Vsak dan je verjetnost, da bo lahko prodal i časopisov enaka p_i, kjer je $p_6 = 0.1, p_7 = 0.2, p_8 = 0.3, p_9 = 0.3$ in $p_{10} = 0.1$. Kako naj se odloči? Kolikšen zaslužek lahko pričakuje v mesecu, ko časopis izide petindvajsetkrat?

4.4 Grosistično podjetje Južno sadje export import d.o.o. oskrbuje z bananami Kranjske prodajalce sadja. Odločiti se morajo, ali naj v naslednjem letu razširi svojo ponudbo na celo Gorenjsko, ali celo na vso Slovenijo, ali pa naj ostane le Kranjski dobavitelj banan. Banane kopujejo po ceni 25 SIT/kg, prodajajo pa jih po 50 SIT/kg. Pri tem imajo stroške skladiščenja, transporta in reklame: 2.5 SIT/kg, če ostanejo le lokalni dobavitelj; 7.5 SIT/kg, če razširijo svojo mrežo na celo Gorenjsko; in 15 SIT/kg, če razširijo prodajno mrežo na celo Slovenijo. Ocenjujejo, da bi naslednje leto lahko prodali d kilogramov banan z verjetnostjo $p(d)$ (vrednosti so podane v tabeli, posebej za vsako od treh možnih odločitev).

Kranj		Gorenjska		Slovenija	
d	p(d)	d	p(d)	d	p(d)
8000	0.2	14000	0.1	22000	0.2
6000	0.3	8000	0.4	14000	0.2
4000	0.3	5000	0.3	8000	0.3
2000	0.2	3000	0.2	4000	0.3

Kako naj se odločijo?

4.5 V pizzeriji *Pod Pipo* se odločajo, koliko naj pri njih stane pizza. Odločajo se med petimi cenami: 500, 600, 700, 800 in 900 donarjev. Predpostavljajo, da bo cena pizze v konkurenčni pizzeriji *Pri Kovcu* 600 donarjev z verjetnostjo 0.25, 800 donarjev z

verjetnostjo 0.5 ter 1000 donarjev z verjetnostjo 0.25.
Če *Pod Pipo* postavijo ceno p_1 *Pri Kovcu* pa je cena pizze p_2, tedaj bodo *Pod Pipo* dnevno prodali $100 + 0.25(p_2 - p_1)$ pizz. Stroški za pripravo ene pizze znašajo 400 donarjev.
Pri kateri ceni bodo *Pod Pipo* imeli največji dnevni dobiček?

4.6 Podjetje ABC se odloča o reklamni strategiji za naslednje leto. Odločiti se mora med tremi možnostmi:
$X_1 \equiv$ obdržati dosedanjo raven reklam;
$X_2 \equiv$ povečati raven reklam za 1 M;
$X_3 \equiv$ povečati raven reklam za 4 M.
Učinek reklam je seveda odvisen od splošnega stanja v gospodarstvu (Izboljšano, Enako, Poslabšano) v naslednjem letu. V tabeli so podani pričakovani čisti dobički (stroški za reklamo so že upoštevani).

	I	E	P
X_1	2	0	-1
X_2	4	1	0
X_3	6	2	-2

Kako naj se odločijo glede na posamezne kriterije? (Za Hurwitza vzemi $\alpha = 0.5$)

4.7 Predsednik velike naftne družbe se odloča, kako naj investira 10 milijonov denot v raziskave in razvoj. Investira lahko celotno vsoto bodisi v raziskave izkoriščanja sončne energije, bodisi v razvoj postopka predelave premoga v gorivo, ki bi manj onesnaževalo okolje. Poleg omenjenih možnosti se lahko odloči še za investicijo polovice vsote v vsako od omenjenih področij raziskav. Uspešne raziskave s področja izkoriščanja sončne energije obetajo povrnitev stroškov in še profit v višini 1000% vloženega denarja, uspeh raziskav predelave premoga pa obeta povrnitev vloženega denarja in še profit v višini 500% vloženega denarja. Sestavi plačilno tabelo. Kako naj se odločil glede na posamezne kriterije (pesimist, optimist, Laplace, Savage)?

4.8 Prodajalec osvežilnih pijač se mora odločiti, kje naj poleti najame kiosk za prodajo pijač. Na voljo ima tri kioske: prvega na kopališču, drugega ob teniškem igrišču in tretjega v zabaviščnem parku. Najemnina za prvi kiosk je 6, za drugega 8 in za tretjega 5 denarnih enot. Če bo poletje običajno toplo, bi na kopališču prodal za 11, ob igrišču za 15 in v zabavišču za 12 denarnih enot pijač. Če bo poletje sončno in vroče, bi na kopališču prodal za 15, ob igrišcu 13 in v zabavišču za 12 denarnih enot pijač. Če bo poletje deževno, bi na kopališču prodal za 5, ob igrišču za 11 in v zabavišču za 10 denarnih enot pijač. Če bo poleti gospodarska kriza, bi na kopališču prodal za 9, ob igrišču za 9 in v zabavišču za 2 denarni enoti pijač. (V navedenih zneskih so že upoštevani stroški nabave pijač, ni pa še upoštevana najemnina kioska.) Določi α, pri katerem sta možni dve enakovredni odločitvi po Hurwitzovem kriteriju. Kako naj se prodajalec odloči glede na preostale kriterije?

1.5 Odločitvena drevesa

5.1 V tovarni razmišljajo o nabavi novega stroja. Obstaja tudi možnost, da posodobijo obstoječi stroj ali pa ga uporabljajo takega kot je. Stroji delujejo različno, glede na kakovost surovine. Ker novi ali posodobljeni stroj delujeta veliko hitreje, je pri surovini slabe kakovosti veliko izmeta; toda pri dobri surovini omogočata precejšen dobiček, glede na obstoječi stroj. Dobički v denotah so prikazani v tabeli:

kakovost surovine	novi stroj	posodobljeni	stari stroj
dobra	300	120	80
slaba	-150	30	60

Verjetnost, da dobimo dobro surovino je 0.35 . Lahko pa pred odločitvijo o stroju naredimo test, ki stane 6 denot; toda žal ni popolnoma zanesljiv – dejanska kakovost se pokaže šele med obdelavo. Dosedanje izkušnje kažejo, da velja:

		kasneje se je izkazalo	
		dobra	slaba
test je napovedal:	dobra	0.8	0.3
	slaba	0.2	0.7

Kako naj se v tovarni odločajo?

5.2 Kupujete avtomobil. Preostali sta vam še dve možnosti: čisto nov avto, ki stane 400 enot, in rabljeni avto, ki stane 275 enot. Z novim avtomobilom ne boste imeli dodatnih stroškov; rabljeni avto pa je lahko:

- zelo dober – 75 enot dodatnih stroškov,
- zelo slab – 175 enot dodatnih stroškov.

Domnevate, da je verjetnost, da je avto zelo dober, $\frac{2}{5}$; lahko pa počakate na prijatelja mehanika, ki bo avto preizkusil. Verjetnost, da vam bo prijatelj svetoval nakup, če ej avto zelo slab, je 0.1 in 0.9, če je avto zelo dober. Toda z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ se lahko zgodi, da bodo, medtem ko čakate na prijatelja, avto prodali.
Druga možnost je, da (za zanemarljive stroške) preizkus opravi mehanik iz bližnje delavnice. Ker je mogoče dogovorjen z lastnikom rabljenega avtomobila ocenjujete, da je verjetnost, da vam bo mehanik svetoval nakup, če je avto zelo slab 0.5, in je 1, če je avto zelo dober.
Odločite se lahko le za en preizkus avtomobila.
Kaj boste storili?

5.3 Pri tvrdki Smradek & so razvili novo gnojilo. Ocenjujejo, da bodo imeli 50000 donarjev dobička, če bo gnojilo na tržišču uspešno; in 35000 donarjev izgube, če bo neuspešno. Dosedaj so bili podobni izdelki uspešni v 60 % primerov. Za 5000 donarjev lahko dajo gnojilo na analizo. Verjetnost, da bo izdelek uspešen, je 0.8, če bo mnenje ugodno; in 0.3, če bo mnenje neugodno. Ocena za verjetnost ugodnega mnenja je 0.6 . Kako naj se pri Smradku odločijo?

5.4 Kmet Janez se mora odločiti ali naj poseje žito ali koruzo. Če poseje koruzo in bo vreme toplo, bo zaslužil 8000 donarjev; če pa poseje koruzo in bo vreme hladno, bo zaslužil

5000 donarjev. Če poseje pšenico in bo vreme toplo, bo zaslužil 7000 donarjev; če pa poseje pšenico in bo vreme hladno, bo zaslužil 6500 donarjev. V zadnjih letih je bilo 40% hladnih in 60% toplih let. Pred setvijo lahko Janez za 600 donarjev dobi strokovno vremensko napoved. Verjetnost, da bo strokovnjak pravilno napovedal hladno vreme je 0.9; verjetnost, da bo pravilno napovedal toplo vreme pa je 0.8.

Kako naj se Janez odloči?

5.5 Prevozno podjetje Transport d.o.o. ima naročili za dva prevoza: enega iz Ljubljane v Beograd, drugega pa iz Ljubljane v Sarajevo. Ker imajo pri Transportu le enega voznika, ki je pripravljen peljati na ti dve poti, se morajo odločiti, katero od naročil bodo sprejeli. Beograjski naročnik potrebuje prevoz v obe smeri, sarajevski pa potrebuje prevoz v eno smer, v drugo pa le z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Beograjčan je za prevoz v obe smeri pripravljen plačati 2500 donarjev, Sarajevčan pa za prevoz v vsako od smeri po 2000 donarjev. Iz Transporta lahko pokličejo svojega zastopnika v Sarajevu in ga vprašajo, kakšno je zadnje čase zanimanje za prevoz blaga v Ljubljano (po ceni 2000 donarjev). Dane so naslednje pogojne verjetnosti:
P(odgovor = veliko zanimanje/dobili bodo naročilo) = 0.8
P(odgovor = malo zanimanje/dobili bodo naročilo) = 0.2
P(odgovor = veliko zanimanje/ne bodo dobili naročila) = 0.3
P(odgovor = malo zanimanje/ne bodo dobili naročila) = 0.7 .
Kako naj ravnajo?

5.6 Gradbeno podjetje kupuje zemljišče za zidavo ene stolpnice. Na voljo sta dve stavbni zemljišči po 20000 denot vsako. Če je zemljišče trdno, je v resnici vredno 25000 denot, poleg tega pa lahko z gradnjo na njem ustvari dodatnih 10000 denot dobička. Če pa zemljišče ni trdno, je vredno le 2000 denot, torej ima podjetje z nakupom netrdnega zemljišča 18000 denot izgube, poleg tega pa ne more na njem zgraditi stolpnice. Pri podjetju ocenjujejo, da je verjetnost, da sta obe zemljišči netrdni, enaka 0.2, verjetnost, da je netrdno eno od obeh zemljišč 0.3 in verjetnost, da sta obe zemljišči trdni 0.5. Ocenjujejo, da sta obe zemljišči enako verjetno netrdni. Odločiti se morajo, ali naj takoj kupijo obe zemljišči ali nobenega, ali pa naj kupijo eno zemljišče in preverijo njegovo trdnost, ter se nato odločijo, ali bodo kupili tudi drugo zemljišče. Preverjanje trdnosti jih v tem primeru stane 200 denot in da zanesljiv odgovor. Kako naj se odločijo?

5.7 Spremljevalko (spremljevalca) nameravate odpeljati na gledališko predstavo. V večernih urah pa je v okolici gledališča zelo te zko najti parkirni prostor. Na srečo so v bližini gledališča tri parkirne hiše: prva je eno ulico pred gledališčem (glede na smer vašega prihoda), druga je nasproti gledališča, tretja pa eno ulico za gledališčem. Verjetnost, da bo v parkirni hiši nasproti gledališča ob vašem prihodu še kaj prostora, je 60%, verjetnost, da bo prostor v prkirni hiši eno ulico pred gledališčem je 80%, verjetnost da bo prostor v preostali parkirni hiši pa je 80%. Ulica, ki pelje mimo gledališča, je enosmerna, kar vam onemogoča vračanje do parkirne hiše, mimo katere ste že peljali (pot naokrog pa je tako zamudna, da bi zamudili predstavo). Vasa spremljevalka (spremljevalec) je zelo zahtevna (zahteven) in vas kaznuje s kaznijo 1, če ne parkirate nasproti gledališča, ter kazen 10, če ne najdete parkirnega prostora ali zamudite predstavo.

a) Kakšno strategijo bi izbrali, da bi bila pričakovana kazen čim manjša?

b) Kaj pa, če je verjetnost, da je še kaj prostora v parkirni hiši nasproti gledališča enaka 70%?

5.8 V Tepanjah pripravljajo *Veselico pod senikom.* Ocenjujejo, da bo glede na vreme dobiček od izvedbe *Veselice* naslednji:

	dobiček	p
deževno	-100 000	0.1
oblačno	50 000	0.3
sončno	200 000	0.6

Drugi stolpec opisuje verjetnosti posameznih vremenskih stanj za ta letni čas glede na podatke zadnjih let.

Pred *Veselico* je potrebno pripraviti prireditveni prostor. Če prireditev odpovedo pravočasno (vsaj teden prej), so stroški priprav 10 000 denot. Z odpovedjo lahko tudi zavlačujejo do dne pred prireditvijo – tedaj odpoved povzroči dodatnih 10 000 denot stroškov. Pri tej odločitvi lahko upoštevajo tudi vremensko napoved za naslednji dan. Točnost napovedi opisuje tabela:

		dejansko vreme		
		deževno	oblačno	sončno
	deževno	0.7	0.2	0.1
napoved:	oblačno	0.2	0.6	0.2
	sončno	0.1	0.2	0.7

Kako naj se odločajo?

5.9 V Tepanjah pripravljajo *Veselico pod senikom.* Ocenjujejo, da bo glede na vreme dobiček od izvedbe *Veselice* naslednji:

	dobiček	p
deževno	-100 000	0.3
oblačno	50 000	0.6
sončno	200 000	0.1

Drugi stolpec opisuje verjetnosti posameznih vremenskih stanj za ta letni čas glede na podatke zadnjih let.

Pred *Veselico* je potrebno pripraviti prireditveni prostor. Če prireditev odpovedo pravočasno (vsaj teden prej), so stroški priprav 10 000 denot. Z odpovedjo lahko tudi zavlačujejo do dne pred prireditvijo – tedaj odpoved povzroči dodatnih 10 000 denot stroškov. Pri tej odločitvi lahko upoštevajo tudi vremensko napoved za naslednji dan. Točnost napovedi opisuje tabela:

		dejansko vreme		
		deževno	oblačno	sončno
	deževno	0.7	0.2	0.1
napoved:	oblačno	0.2	0.6	0.2
	sončno	0.1	0.2	0.7

Kako naj se odločajo?

1.6 Odločanje v skladu z večimi kriteriji – Saatyjeva metoda

6.1 Pred kratkim smo imeli volitve županov.

a) Opišite, kako bi uporabili Saatyev postopek pri odločitvi, koga bi volili.

b) Uporabite to na konkretnem primeru neke izbrane občine. (Upoštevajte vsaj tri kandidate in vsaj štiri kriterije; kandidatom lahko date izmišljena imena ali oznake).

6.2 Gospod Magnatis kupuje novo jahto. Odloča se glede na tri kriterije: izgled, prostornost in hitrost plovila. Medsebojno primerjavo teh treh kriterijev podaja naslednja tabela:

	I	P	H
I	1	3	5
P	$\frac{1}{3}$	1	3
H	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

Na voljo ima tri možnosti izbire: jahto A, jahto B in jahto C. Medsebojne primerjave jaht glede na izgled, prostornost in hitrost podajajo tabele:

Izgled:

	A	B	C
A	1	5	3
B	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{3}$	2	1

Prostornost:

	A	B	C
A	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
B	6	1	2
C	4	$\frac{1}{2}$	1

Hitrost:

	A	B	C
A	1	4	$\frac{1}{4}$
B	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{9}$
C	4	9	1

a) Za katero od jaht naj se odloči?

b) Izračunaj mero neusklajenosti za prvo tabelo.

6.3 Janez se odpravlja na krajši dopust. Odloča se med tremi kraji: Bovcem, Radenci in Portorožem. Za dopust je namenil 20000 SIT. Stroški bivanja in prevoza so naslednji: Bovec 10000 SIT, Radenci 11000 SIT in Portorož 14000 SIT. Odloča se glede na tri kriterije: preostanek denarja, športno ponudbo in možnost zabave. Glede denarja vrednoti posamezno možnost sorazmerno znesku. Medsebojne primerjave kriterijev in krajev glede na preostala kriterija podajajo tabele:

KRITERIJI:

	denar	šport	zabava
denar	1	2	2
šport	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
zabava	$\frac{1}{2}$	2	1

ŠPORT:

	Bovec	Radenci	Portorož
Bovec	1	5	3
Radenci	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{4}$
Portorož	$\frac{1}{3}$	4	1

ZABAVA:

	Bovec	Radenci	Portorož
Bovec	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
Radenci	3	1	$\frac{1}{4}$
Portorož	6	4	1

Kam naj gre Janez na dopust? Določi razmerje neusklajenosti za eno od tabel (po izbiri).

6.4 Janez se odloča, s katerim novim športom bi se začel ukvarjati. V ožji izbor so prišli tek v naravi, tenis ter jadralno padalstvo. Janez se želi odločiti glede na tri kriterije: zdravje, ugodna cena ter razburljivost športa. Medsebojne primerjave kriterijev in športov glede na posamezne kriterije podajajo tabele:

kriteriji:	zdravje	cena	razburljivost
zdravje	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
cena	2	1	$\frac{1}{2}$
razburljivost	3	2	1

zdravje:	tek	tenis	padalstvo
tek	1	3	5
tenis	$\frac{1}{3}$	1	3
padalstvo	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

cena:	tek	tenis	padalstvo
tek	1	6	4
tenis	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{2}$
padalstvo	$\frac{1}{4}$	2	1

razburljivost:	tek	tenis	padalstvo
tek	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
tenis	3	1	$\frac{1}{2}$
padalstvo	6	2	1

S katerim športom naj se Janez začne ukvarjati? Odgovor utemelji ter opravi analizo usklajenosti matrike medsebojnih primerjav kriterijev.

1.7 Teorija iger

7.1 Določi optimalni strategiji in vrednost igre s plačilno matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

elementi katere so dobički prvega igralca.

7.2 Poišči vrednost igre ter vse optimalne strategije vsakega od igralcev, če je dana plačilna matrika igre, ki vsebuje izplačila prvega igralca:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7.3 Poišči vrednost igre z ničelno vsoto in optimalni strategiji obeh igralcev, če je plačilna matrika igre

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

in vsebuje plačila prvega igralca drugemu.

7.4 Določi optimalni strategiji za oba igralca za matrično igro s plačilno matriko, ki vsebuje plačila prvega igralca:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

7.5 *Tihi dvoboj* ima tale pravila.
Dvobojevalcema zavežejo oči. Vsak od njiju ima neslišno pištolo s po enim nabojem. Drug proti drugemu istočasno napravita po pet korakov. Ustrelita lahko po kateremkoli koraku, verjetnost za zadetek po k-tem koraku pa je enaka $\frac{k}{5}$. "Dobiček" prvega igralca v tej igri je razlika med verjetnostjo, da prvi zadene drugega, in verjetnostjo da drugi zadene prvega.
(Pozor: kdor je zadet ne more več streljati.)

a) Sestavi plačilno matriko te igre.

b) Pomnoži matriko s takšnim številom, da da bodo vsi elementi cela števila, upoštevaj dominacijo ter vrednost in rešitev igre.

7.6 Igra tihi dvoboj ima naslednja pravila: igralca napravita eden proti drugemu 1, 2, 3 ali 4 korake. Po vsakem koraku lahko vsak od njiju ustreli, vendar le enkrat. Strel je neslišen, verjetnost zadetka na k–tem koraku je $\frac{k}{4}$, korake pa delata istočasno. Sestavi plačilno matriko ter poišči vrednost in rešitev igre.
Opomba: za podrobnejša navodila glej tudi prejšnjo nalogo.

7.7 *Nori Max* želi priti iz New Yorka v Dallas po čim krajši poti, *Hudobna Čarovnica* pa mu želi potovanje čim bolj podaljšati. *Nori Max* lahko potuje po poteh naštetih v naslednji tabeli:

POT	DOLŽINA (milje)
New York → Atlanta	800
New York → Nashville	900
Nashville → St. Louis	400
Nashville → New Orleans	200
Atlanta → St. Louis	300
Atlanta → New Orleans	600
St. Louis → Dallas	500
New Orleans → Dallas	300

Hudobna Čarovnica mu potovanje otežuje tako, da zapre po eno cesto iz Atlante in Nashvilla.

Ali naj *Nori Max* potuje skozi Atlanto ali skozi Nashville če vnaprej ne ve, katera cesta je zaprta, dokler ne pride v omenjena kraja, *Hudobna Čarovnica* pa ne ve, skozi kateri od omenjenih krajev se je namenil *Nori Max*? Kateri poti naj zapre *Hudobna Čarovnica*?

7.8 **Dvoprstna morra** je priljubljena italijanska igra za dva igralca. Pravila igre so takale: igralca istočasno pokažeta z desnico en ali dva prsta, z levico pa napovesta, koliko prstov bo pokazal nasprotnik. Če napovesta oba pravilno ali oba napačno, je igra neodločena, če pa en igralec ugane, drugi pa ne, plača poraženec zmagovalcu toliko denarnih enot, kolikor prstov sta pokazala oba skupaj. Igra je očitno antagonistična. Poiščite plačilno matriko igre ter poiščite vse optimalne strategije obeh igralcev.

7.9 Poišči optimalni strategiji obeh igralcev in vrednost igre, ki jo opisuje plačilna matrika

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

elementi katere so dobički prvega igralca.

7.10 Konkurenčni trgovski podjetji se odločata, ali naj odpreta trgovini v kraju A, B ali C, kjer doslej ni bilo tovrstne trgovine. Odločiti se morata "istočasno"(to je brez dodatne informacije o tem, kako se je odločilo konkurenčno podjetje), vsako od njiju pa bo odprlo natančno eno trgovino. V kraju A je 20 potencialnih kupcev, v kraju B 20 in v kraju C 12. Vsak kupec bo kupoval v trgovini, ki mu bo najbližje. Če pa bo do obeh trgovin enako daleč, bo kupoval v obeh trgovinah (v vsaki $\frac{1}{2}$). Od kraja A do kraja B je 10km, od kraja B do kraja C 10km, najkrajša pot od A do C pa vodi skozi B. Kraji A, B in C ležijo daleč od ostalih naselij. Vsako od podjetij želi, da bi v njegovi trgovini kupovalo čimveč kupcev.
Kje naj odpre trgovino prvo in kje drugo podjetje?
Koliko kupcev pričakujeta?

7.11 Konkurenčni trgovski podjetji se odločata, ali naj odpreta trgovini v vaseh A, B, C ali D, kjer doslej ni bilo tovrstne trgovine. Odločiti se morata istočasno (to je brez dodatne informacije o tem, kako se je odločilo konkurenčno podjetje), vsako od njiju pa bo odprlo natanko eno trgovino. V vasi A je 30 potencialnih kupcev, v vasi B 40, v vasi C 10 in v vasi D 20. Vsak kupec bo kupoval v trgovini, ki mu bo najbližje. Če bo do obeh trgovin enako daleč, bo kupoval v obeh trgovinah, v vsaki $\frac{1}{2}$. Vasi ležijo ob vznožju visoke gore, tako da edina pot, ki jih povezuje obkroži goro. Na tej krožni poti (A–B–C–D–A) so razdalje med zaporednimi vasmi enake. Vsako od podjetij želi, da bi v njegovi trgovini kupovalo čimveč kupcev. Kje naj odpre trgovino prvo in kje drugo podjetje? Koliko kupcev pričakujeta?

7.12 Konkurenčni trgovski podjetji se odločata, ali naj odpreta trgovini v vaseh A, B, C ali D, kjer doslej ni bilo tovrstne trgovine. Odločiti se morata istočasno (to je brez dodatne informacije o tem, kako se je odločilo konkurenčno podjetje), vsako od njiju pa bo odprlo natanko eno trgovino. V vasi A je 30 potencialnih kupcev, v vasi B 40, v vasi C 10 in v vasi D b kupcev. Vsak kupec bo kupoval v trgovini, ki mu bo najbližje. Če bo do obeh trgovin enako daleč, bo kupoval v obeh trgovinah, v vsaki $\frac{1}{2}$. Vasi ležijo ob vznožju visoke gore, tako da edina pot, ki jih povezuje obkroži goro. Na tej krožni poti (A–B–C–D–A) so razdalje med zaporednimi vasmi enake. Vsako od podjetij želi, da bi v njegovi trgovini kupovalo čimveč kupcev. Pri katerih vrednostih parametra $b \in \mathbb{N}_0$ je obema podjetjema najugodneje odpreti trgovino v vasi A, pri katerih v B, pri katerih v C in pri katerih v D? Odgovor utemelji.

7.13 Konkurenčni podjetji se odločata, kdaj izvesti akcijo prodaje okraskov na novoletnem sejmu. Sejem bo potekal 3 tedne, vsako od podjetij lahko prodaja le en teden, prodajni prostor pa si morata rezervirati v naprej, pri čemer nobeno od podjetij ne ve, kdaj bo okraske prodajalo konkurenčno podjetje. k–ti teden je okraske pripravljeno kupiti $\frac{k}{3}$ preostalih potencialnih kupcev. (Mišljeno je $\frac{k}{3}$ tistih kupcev, ki okraskov še niso kupili pri konkurenčnem podjetju, če je le-to prodajalo okraske kateri od predhodnih tednov. Pri tem seveda ni nujno, da v času sejma vsak potencialni kupec tudi kupi okraske. V primeru, ko obe podjetji prodajata okraske isti teden upoštevaj, da imata tudi obe enako število kupcev.)

Vsako od podjetij želi, da bi pri njem kupilo okraske čim več kupcev, pri konkurenčnem podjetju pa čim manj. Kriterij za uspeh prodajne akcije podjetja je torej število njegovih kupcev – število kupcev konkurenčnega podjetja.

a) Pokaži, da nalogo lahko definiramo kot končno igro dveh igralcev z ničelno vsoto.

b) Sestavi plačilno matriko igre.

c) Poišči vrednost in rešitev igre za vsakega od igralcev.

d) * Reši točko a) in zapiši splošen element plačilne matrike, če sejem traja a tednov, k–ti teden pa je okraske pripravljeno kupiti $\frac{k}{a}$ preostalih potencialnih kupcev.

1.8 Generator naključnih števil

8.1 V potovalni agenciji Potepuh so merili trajanja telefonskih pogovorov. Dobili so naslednje podatke:

3:29, 1:36, 0:37, 1:05, 6:00, 1:19, 0:06, 0:49, 0:30, 0:48, 0:21, 1:08, 1:17, 1:36, 0:47, 2:05, 5:36, 1:05, 3:06, 0:07, 0:20, 0:41, 2:01, 2:08, 0:03, 0:33, 0:53, 3:36, 0:08, 1:27

kjer $m : s$ pomeni m minut in s sekund. Sestavi funkcijski podprogram TRAJANJE, ki vrača zaporedje naključnih števil, ki posnema dane podatke (je enako porazdeljeno).

8.2 Sestavi generator naključnih števil porazdeljenih z gostoto

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1)^3 & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

8.3 Sestavi generator zaporedja naključnih števil z gostoto porazdelitve:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{4}(3-x) & ; 1 \le x \le 3 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

8.4 Dana je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ ax & ; 0 \le x < 1 \\ ae^{1-x} & ; x \ge 1 \end{cases}$$

Določi konstanto a tako, da bo $g(x)$ gostota porazdelitve in nato sestavi generator zaporedja naključnih števil s to gostoto.

8.5 Sestavi generator zaporedja naključnih števil z zvezno gostoto porazdelitve oblike:

$$g(x) = cx(1-x^2);\ x \in [0,1].$$

8.6 Napiši generator zaporedja naključnih števil z gostoto porazdelitve oblike

$$g(x) = c(1+x)^{\frac{3}{4}}; \quad 0 \le x \le 1$$

8.7 Sestavi generator naključnih števil, ki bo dajal zaporedje porazdeljeno na $(0,1)$ z gostoto oblike $g(x) = cx(1-x)2$.

8.8 Sestavi generator zaporedja naključnih števil s porazdelitveno funkcijo

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \frac{x+1}{x+2}; & x > 0 \end{cases}$$

8.9 Sestavi generator zaporedja naključnih števil z gostoto porazdelitve

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & \text{za } 2 \le x \le 3 \\ 1 - \frac{x}{6} & \text{za } 3 \le x \le 6 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

8.10 Danih je prvih dvajset členov zaporedja števil:

$$3, 1, 5, 2, 4, 0, 2, 3, 6, 3, 1, 4, 5, 1, 2, 4, 2, 7, 3, 2.$$

Kasneje v zaporedju nastopajo poljubno velika števila. Po katerem od klasičnih porazdelitvenih zakonov je porazdeljeno zaporedje? Izračunaj parametre porazdelitve ter sestavi generator zaporedja naključnih števil, porazdeljenih po istem porazdelitvenem zakonu.

8.11 Določi konstanto b tako, da bo

$$p(x) \;=\; \begin{cases} bx\sqrt{a^2 - x^2} & ;\ 0 \le x \le a \\ 0 & ;\ sicer \end{cases}$$

zvezna gostota porazdelitve ter sestavi generator zaporedja naključnih števil z gostoto porazdelitve p.

8.12 Za razširjeno slovensko abecedo $\mathcal{A}$ (25 črk in presledek) je podana tabela S[$\mathcal{A}$,$\mathcal{A}$], ki vsebuje rezultate štetja na obsežnem besedilu. Znaki, ki ne pripadajo $\mathcal{A}$, so obravnavani kot presledek.
S[x,y] = število pojavitev para znakov xy v besedilu
Sestavi postopek za generiranje naključne slovenske besede (zaporedje znakov med dvema presledkoma).

8.13 Dana je družina zveznih gostot porazdelitve oblike

$$g(x; a) = \frac{c}{1 + e^{ax}}$$

(Varianta : $h(x; a, b, d) = \frac{c}{b+de^{ax}}$)
s parametrom $a > 0$. Določi c in sestavi generator zaporedja naključnih števil, porazdeljenih z gostoto g pri danem a.

8.14 Polja kvadrata 4×4 pobarvamo z dvema barvama, belo in črno. Dve barvanji sta enakovredni, če eno lahko dobimo iz drugega z zasukom in/ali zrcaljenjem. Sestavi postopek, ki naključno generira zaporedje barvanja tako, so vse skupine barvanj enako verjetne, v zaporedju pa iz vsake skupine nastopa kvečjemu en predstavnik.

8.15 Sestavi generator zaporedja naključnih števil z gostoto porazdeli tve oblike

$$g(x) \;=\; \begin{cases} ax^2 & ;\ -1 \le x < 0 \\ 1 - x & ;\ \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & ;\ \qquad sicer \end{cases}$$

8.16 Določi vrednost konstante $a \in (0, 1]$ tako, da bo

$$f_a(x) \;=\; \begin{cases} 1 - x & :\ 0 \le x < a \\ 2a & :\ a \le x \le 1 \\ 0 & :\ sicer \end{cases}$$

gostota porazdelitve ter sestavi generator zaporedja naključnih števil, porazdeljenih z gostoto oblike g_a.

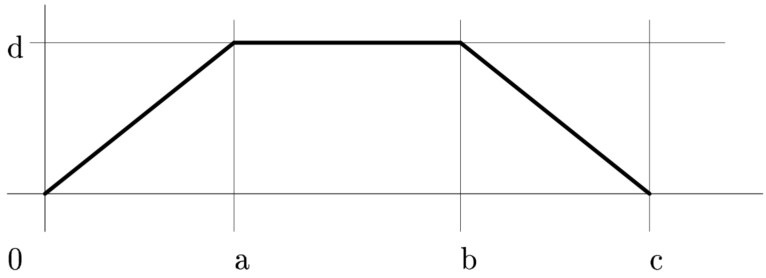
8.17 Strelec večkrat ustreli v tarčo. Odstopanja zadetkov od središča tarče (točka $(0,0)$) so popolnoma slučajna. Oddaljenosti zadetkov od središča so porazdeljene normalno s standardnim odklonom σ.

Sestavi podprogram

```
Strel ( VAR x, y : real; sigma : real )
```

ki ob vsakem klicu vrne koordinati slučajnega zadetka.

8.18 Sestavi generator zaporedja naključnih števil, zvezno porazdeljenih z gostoto oblike, kot jo prikazuje slika, pri čemer a, b in c so dana števila, ter je $0 < a < b < c$.



1.9 Kritična pot in PERT

9.1 Projekt sestavlja osem stanj 1, 2, 3, ..., 8. Z n–m označimo opravilo, ki vodi iz stanja n v stanje m. V tabeli so za vsako opravilo podane: optimistična (a), najverjetnejša (m) in pesimistična (b) ocena trajanja.

opravilo	a	m	b
1–2	1	2	5
1–3	1	3	4
2–3	1	2	3
2–5	2	4	8
3–4	2	3	5
4–5	2	4	5

opravilo	a	m	b
4–6	4	6	10
5–6	3	4	9
5–7	1	3	4
6–7	2	3	5
6–8	4	8	10
7–8	1	4	6

Opravi analizo projekta !

9.2 Trajanje opravil (aktivnosti) projekta so podana v tabeli

aktivnost	t_e	aktivnost	t_e
1–2	4	3–6	7
1–3	6	4–6	4
2–3	3	5–6	6
2–4	6	5–7	6
2–5	5	6–7	1
3–5	2		

a) nariši mrežni diagram projekta

b) naredi CPM analizo

9.3

a) Opravi analizo omrežja PERT podanega s tabelo

opravilo	a	m	b	opravilo	a	m	b
1–2	1	2	5	4–6	4	6	10
1–3	1	3	4	5–6	3	4	9
2–3	1	2	3	5–7	1	3	4
2–5	2	4	8	6–7	2	3	5
3–4	2	3	5	6–8	4	8	10
4–5	2	4	5	7–8	1	4	6

b) Oceni verjetnost, da bo projekt dokončan kasneje kot v 25 časovnih enotah?

9.4 Trajanje opravil (aktivnosti) projekta so podana v tabeli

aktivnost	a_i	m_i	b_i
1–2	4	5	7
2–3	2	3	5
2–6	5	7	11
3–4	2	2	2
3–5	3	4	6
4–5	3	5	6
6–8	3	3	3
6–7	2	2	2
7–8	0	0	0
8–9	3	4	6
5–9	4	6	7

a) nariši mrežni diagram projekta

b) izračunaj povprečje in varianco časa za vsako od aktivnosti

c) poišči pričakovano kritično pot. Kakšna je njena pričakovana dolžina?

d) Kolikšna je verjetnost, da bo projekt končan najkasneje v 22 dneh, če so časi trajanja posameznih opravil neodvisni in porazdeljeni normalno?

9.5 Podjetje ima za izvedbo projekta na voljo 10 delavcev, ki jih mora razporediti na opravili 2-4 in 3-5 (vsak delavec dela le na enem opravilu in ga med izvajanjem del ni mogoče prerazporediti na drugo opravilo) tako, da bo trajanje projekta čim krajše. Pri tem je za opravilo 2-4 potrebnih 6 človek dni, za opravilo 3-5 pa 7 človek dni. Časi trajanja ostalih opravil so neodvisni od razporeditve teh delavcev in znašajo $t_{1-2} = 3.5$ dni, $t_{1-3} = 1$ dan, $t_{3-4} = 4$ dni in $t_{5-6} = 5$ dni.
Koliko dni je potrebno za dokončanje projekta?
Kako naj porazdelijo delavcev, da dosežejo ta (najkrajši) čas?

9.6 Ocene trajanja opravil projekta v dnevih podaja tabela

opravilo	a	m	b
A–B	3	5	8
A–C	2	3	5
A–E	2	3	4
B–C	1	2	5
B–F	7	9	18
C–D	1	3	6
C–E	2	4	6
D–E	1	2	4
E–F	1	2	3

Opravi PERT analizo projekta. Kolikšna je verjetnost, da bo projekt končan najkasneje v 14 dnevih (rezultat izrazi z uporabo porazdelitvene funkcije Φ)?

9.7 Trajanje opravil (aktivnosti) projekta opisuje tabela

opravilo	tednov	opravilo	tednov
1–2	6	4–7	6
1–3	3	5–8	3
1–4	5	6–8	4
2–5	4	6–9	3
2–8	5	7–9	2
3–6	7	8–10	6
4–6	4	9–10	5

Nariši mrežni diagram projekta ter naredi CPM analizo.

9.8 Trajanje opravil (aktivnosti) projekta opisuje tabela

opravilo	dni	opravilo	dni
1–2	2	4–6	6
1–3	3	5–6	4
2–3	2	5–7	3
2–5	4	6–7	3
3–4	3	6–8	8
4–5	4	7–8	4

Nariši mrežni diagram projekta ter naredi CPM analizo.

9.9 Organizator velikega rock koncerta mora narediti načrt priprav za koncert. Trajanja posameznih opravil v dnevih podaja tabela.

OPRAVILO	OPIS	a	m	b
1–2	izbor prizorišča	2	3	4
2–4	izbor tehničnega osebja	1	2	3
2–3	izbor predskupine	2	6	10
3–7	sklenitev pogodbe s TV	1	2	3
2–7	prodaja kart	1	3	5
4–5	priprava razsvetljave in ozvočenja	2	3	4
3–7	izvedba reklamne akcije	3	5	7
3–5	priprava in izvedba prevoza	0.5	1	1.5
5–6	izvedba generalke	1	1.5	2
6–7	zadnje priprave	1	2	3

a) Nariši mrežni diagram.

b) Določi kritično pot in pričakovano trajanje priprav.

c) Zastopnik glasbene skupine zahteva, da so vse priprave končane z verjetnostjo 0,99 do 30. junija. Kdaj mora organizator začeti s pripravami?

9.10 Pričakovana trajanja opravil podaja tabela

opravilo	a	m	b	opravilo	a	m	b
A–B	4	6	8	D–G	5	9	12
A–C	2	4	8	E–G	1	2	3
B–D	1	3	7	F–H	2	3	6
C–D	6	9	12	G–I	10	15	20
C–E	5	10	15	H–I	6	9	11
C–F	7	12	18				

Opravi analizo omrežja PERT ter poišči verjetnost, da bo projekt končan najkasneje v 40 dneh.

9.11 Projekt sestavlja osem opravil A, B, ..., H. V tabeli so za vsako opravilo podani: neposredni predhodniki, običajni in udarniški čas trajanja ter povečanje stroškov na časovno enoto pri pospeševanju.

opravilo	predhodniki	običajni	udarniški	enotska cena
A	–	9	6	2
B	–	8	5	3
C	A	9	7	3
D	A	5	4	5
E	B	7	5	3
F	B	12	8	4
G	C, F	7	4	5
H	D, E	10	7	1

a) Nariši projektno omrežje.

b) Koliko najmanj časa je potrebno za izvedbo projekta brez pospeševanja?

c) Koliko najmanj časa je potrebno za izvedbo projekta?

d) Sestavi linearni program, ki da odgovor na vprašanje: V kolikem času naj bodo izvedena posamezna opravila, če naj bo projekt čim ceneje končan v 23 časovnih enotah?

1.10 Problem zalog

10.1 Trgovina s pohištvom proda letno 600 miz. Vsaka miza stane trgovino 200 donarjev; prodaja pa jih po 360 donarjev. Letni stroški skladiščenja za mizo so 20 donarjev. Stroški naročila (s transportom) so 375 donarjev.

a) kolikokrat letno naj trgovina naroči mize?

b) kolikšni so tedaj celoletni stroški skladiščenja miz?

c) kolikšen je celoletni dobiček?

d) če trgovina naroči hkrati več kot 200 miz, ji da proizvajalec popust in zahteva za mizo le 160 donarjev. Kolikokrat naj trgovina naroči mize v tem primeru?

10.2 Polde Ponkar izdeluje ponke, ki jih prodaja po vnaprej dogovorjeni ceni. Povpraševanje je 10 ponk na teden; stroški skladiščenja so 2 donarja za ponko na teden. Zagonski stroški proizvodnje ponk so 1500 donarjev. Na teden izdela 12.5 ponk. Dopustno je pomanjkanje ponk, pri čemer je žguba"8 donarjev za ponko na teden. Kako naj Polde organizira proizvodnjo in skladišče, da bo dobiček čim večji?

10.3 Tovarna HiFi vgrajuje v svoje izdelke lastne zvočnike. Na mesec izdela 8000 izdelkov. Zvočnike izdeluje občasno in jih v (zanemarljivo) kratkem času lahko izdela veliko. Priprava na izdelavo nove zaloge zvočnikov stane 12000 donarjev. Hranjenje zvočnika na zalogi stane 0.3 donarja/mesec. Izdelava enega zvočnika stane 10 donarjev. Primanjkljaj zvočnika povzroči stroške 1.1 donarja/mesec.

Vsake koliko časa naj tovarna sproži izdelovanje zvočnikov in v kolikšni količini, če:

a) primanjkljaj ni dovoljen;

b) primanjkljaj je dovoljen; kolikšen je v tem primeru največji primanjkljaj?

10.4 Ponka d.o.o. lahko proizvaja priponke *Slovenija moja dažela* po 2000 na dan. Priponke se prodajajo po 300 na dan. Če priponk zmanjka, obstaja možnost naročila s stroški primanjkljaja 1 dinar za priponko na dan. Vsakokratni zagonski stroški proizvodnje priponk so 4000 dinarjev. Stroški skladiščenja so 0,10 dinarjev za priponko na dan. Kako naj pri Ponki organizirajo proizvodnjo priponk?

10.5 Ulični prodajalec proda po 600 priponk na teden. Povpraševanje je enakomerno. Stroški naročila nove pošiljke priponk so 250 denot, nabavna cena posamezne priponke je 30 denot, stroški zalog pa so 0.5 denot za priponko na teden.

a) kako pogosto in koliko priponk naj prodajalec naroča, če primanjkljaj ni dovoljen;

b) kako pogosto in koliko priponk naj prodajalec naroča, če so stroški primanjkljaja 20 denot za priponko na teden?

10.6 OR–I–26.8.91(R)/4

10.7 Tovarna Mitsuzuki načrtuje, da bo naslednje leto izdelala 10000 stereo televizorjev. Odločijo se, da zvočnikov ne bodo izdelovali sami, ampak jih bodo (po dva za vsak televizor) naročili pri ponudniku najkvalitetnejših zvočnikov, ki je predložil naslednji cenik:

10.8 Pri Očalarju prodajo letno 10000 okvirjev za očala. Nabavna cena enega okvirja je 1500 denot. Stroški pošiljke okvirjev znašajo dodatnih 5000 denot. Stranke, ki zaradi primanjkljaja ne morejo takoj dobiti okvirjev, jih dobijo ob novi pošiljki. Strošek primanjkljaja okvirja na leto ocenjujejo na 1500 denot. Letna cena skladiščenja je 30% nabavne cene zaloge. Koliko okvirjev naj naročijo naenkrat? Koliko največ okvirjev jim bo primanjkovalo? Koliko največ okvirjev bodo naenkrat imeli na zalogi? Kako dolgi so časi pomanjkanja?

10.9 Ulični prodajalec proda 600 priponk tedensko. Povpraševanje je enakomerno. Stroški naročila nove pošiljke priponk znašajo 250 denot, nabavna cena posamezne priponke je 30 denot, stroški zalog pa so 0.5 denot za priponko na teden.

a) Kako pogosto in po koliko priponk nal prodajalec naroča, če primanjkljaj ni dovoljen?

b) Kako pogosto in po koliko priponk nal prodajalec naroča, če so stroški primanjkljaja 20 denot za priponko na teden?

2. Rešitve

2.1 Merske lestvice

1.3

a) Smiselna za razmične, ni smiselna za urejenostne.

1.4

(a) Razmernostna,

(b) razmična,

(c) urejenostna lestvica.

(A) smiseln za razmernostne lestvice (a), ni smiseln za razmične (b) in posredno (c).

(B) smiseln za razmične (b) in posredno (a), ni smiseln za urejenostne (c).

(C) Je smiseln za urejenostne (c) in posredno tudi za (a) in (b).

1.5 Smiseln za razmične, ni pa smiseln za urejenostne lestvice.

1.6

a) Razmernostna lestvica;

$$\max_{a \in A} f(a) - \min_{a \in A} f(a) > \max_{k \in K} f(k)$$

je smiseln.

b) Razmernostna lestvica;

$$f(Bohinj) \geq 2f(Kamnik)$$

je smiseln.

c) Je smiseln za razmične, ni pa za urejenostne lestvice.

1.9

a) Da.

b) Ne.

c) Ne.

d) Da.

1.10 Smiseln za razmične, ni smiseln za urejenostne, torej je smiseln tudi za absolutne in razmernostne, ni pa za imenske lestvice.

1.11

a) Lestvica je razmična; stavek formaliziramo

$$f(K2) - f(Z2) > f(K1) - f(Z1)$$

in je smiseln.

b) Izobrazba je urejenostna lestvica; stavek je

$$|f(MM) - f(MO)| > |F(TM) - f(TO)|$$

je neresničen in neresničnost se ne more spremeniti s transformacijo lestvice, torej je smiseln.

c) Je smiseln za razmernostne, ni pa za razmične lestvice.

1.12

a) Stavek je smiseln.

b) Stavek je smiseln.

c) Smiseln za urejenostne in ni smiseln za imenske lestvice.

1.13 Da.

1.14

a) Da. Osmi potnik[3].

b) Ne.

2.2 Porazdelitve

2.1 48.

2.3 Kaljivost posameznega semena je porazdeljena po Bernoullijevem zakonu s $p = 0.95$. Število kaljivih semen v vzorcu dvajsetih je porazdeljeno po binomskem zakonu $B(20, 0.95)$, ker so kaljivosti posameznih semen neodvisne.
P[največ 16 kaljivih semen v vzorcu] $= 0.0159$.
Verjetnost, da je v naključnem vzorcu dvajsetih semen največ 16 kaljivih semen, je v primeru, da prodajalec govori resnico, približno 0.0159, kar je premalo, da bi prodajalcu lahko verjel.

2.5 $\mathsf{E}(Profit) = 9815$ donarjev, $\sigma(Profit) = 4360$ donarjev.

2.6 Na zalogi morajo imeti vsak dan 10 tort.

2.7

a) $-, 14,8,\ 14,2,\ 13,6,\ 13,2,\ 13,0,\ 12,8,\ 12,4,\ 11,8$

b) $X_T = 13,2 - 0,36T$;

c) $10,9$

2.3 Aproksimacija in glajenje

3.1

a)

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+bx_i)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{1+bx_i} \qquad (1)$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{(1+bx_i)^3} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{(1+bx_i)^2} \qquad (2)$$

$$(3)$$

b) Odtod izrazi a; dobiš enačbo b, ki jo rešiš numerično.

3.2 Označimo

$$A=\sum_{i=1}^{n}x_i^2, B=\sum_{i=1}^{n}x_i^{-2}, C=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, D=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}$$

Tedaj je

$$a=\frac{BC-nD}{AB-n^2}, b=\frac{AD-nC}{AB-n^2}$$

3.3 Označimo

$$A=\sum_{i=1}^{n}x_i^2, B=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i-1}$$

$$C=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_{i-1}, D=B$$

$$E=x_0^2+x_n^2+2\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2-\sum_{i=0}^{n}x_ix_{i-1}\right)$$

$$F=x_0y_0+x_ny_n+2\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}y_i+\sum_{i=1}^{n}x_iy_{i-1}\right)$$

Tedaj je

$$a=\frac{CE-BF}{AE-BD}, B=\frac{AF-CD}{AE-BD}$$

3.4

a) $v(t)=ab^t$ za $a,b>0$.

b) Parametra lahko določimo na več načinov:

- $a=v_0$, odtod $b=2^{\frac{1}{T}}$.
- Logaritmiramo podatke in poiščemo regresijo.
- Z metodo najmanjših kvadratov dobimo sistem dveh nelinearnih enačb, ki ga rešujemo numerično.

3.5 Stacionarne točke so

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i' - x_i y_i'}{\sum_{i=1}^n x_i x_i' + y_i y_i'} \varphi_2 = \phi_1 + \pi$$

Minimum je dosežen pri natanko tistem od njiju

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \left(1 + \operatorname{sgn} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i' - x_i y_i' \right) \right)$$

Problem nastopi v primeru nedoločenega izraza $\frac{0}{0}$. Takrat ustrezajo vsi koti.

2.4 Odločitvene tabele

4.2 Vnaprej naroči 80 prigrizkov. Če vseh ne proda ostanek vrne, če pa prigrizkov zmanjka, naroči dostavo manjkajočih. Pri tem je pričakovani zaslužek 1410 denot.

4.3 V mesecu lahko pričakuje 8.125 donarja dobička, če naroči po 7 časopisov na dan.

4.4 Razširijo naj prodajo na Gorenjsko.

4.5 *Pod Pipo* od prodanih pizz dnevno iztržijo $(p_1 - 400)(100 + 0.25(p_2 - p_1))$ donarjev. Sestavimo tabelo dnevnih dobičkov in za vsako od možnih cen $p_1 \in \{500, 600, 700, 800, 900\}$ izračunamo pričakovani dnevni dobiček tako, da (skalarno) množimo ustrezno vrstico tabele z vektorjem verjetnosti cen pri konkurenci:

cena *Pod Pipo*	cena *Pri Kovcu:* 600	800	1000	pričakovani dnevni dobiček
	0.25	0.5	0.25	
500	12500	17500	22500	17500
600	20000	30000	40000	30000
700	22500	37500	52500	37500
800	20000	40000	60000	<u>40000</u>
900	12500	37500	62500	37500

Največji dnevni dobiček 40000 donarjev tako pričakujejo pri ceni 800 donarjev za pizzo.

4.6 Pesimist bi povečal raven reklam za 1M, optimist za 4M, Hurwitzu pri $\alpha = 0.5$ za 1M ali 4M, Laplace za 4M. Tudi po kriteriju najmanjšega obžalovanja bi povečali raven reklam za 1M ali za 4M.

4.7 Pesimistu je vseeno, optimist in Laplace se odločita za vlaganje v razvoj izkoriščanja sončne energije, Savage vlaga v oboje.

4.8 Optimist najame kiosk na kopališču, pesimist na teniškem igrišču, Laplaceu je vseeno kje. Pri $\alpha = \frac{1}{2}$ se Hurwitz enakovredno odloča med kopališčem in teniškim igriščem. S stališča najmanjšega obžalovanja je najugodnejše teniško igrišče.

2.5 Odločitvena drevesa

5.3 Odločili se bodo za prodajo novega gnojila brez predhodne analize. Pričakujejo dobiček 16000 donarjev.

5.4 Janez ne bo za napoved strokovnjaka. Ne glede na to, kaj bo sejal, lahko pričakuje 6800 donarjev dobička.

5.5 Telefonirajo naj v Sarajevo. Če je zanimanje za prevoz v Sarajevo veliko naj peljejo v Sarajevo, sicer pa v Beograd. Pri tem lahko pričakujejo 3024.70 donarjev dobička.

5.6 Kupijo naj eno od zemljišč. Ne glede na rezultat raziskave trdnosti naj ne kupijo drugega zemljišča.

5.7

a) Parkira naj v prvi nezasedeni garaži. Pričakuje povprečno kazen 1.024.

b) Poskusi naj parkirati v drugi garaži ne glede na to, ali je v prvi prostor. Če v drugi ni prostora, naj poskusi parkirati v tretji garaži. Pričakuje povprečno kazen 0.84.

5.8 Doseči želijo čim večji pričakovani dobiček. Odločajo se v naslednjem časovnem zaporedju.
Teden dni pred prireditvijo se prvič odločajo, ali naj jo odpovedo. Taka odločitev jim prinese dobiček -10000 denot.
Dan prerd prireditvijo, ko že poznajo vremensko napoved za dan prireditve, se drugič odločajo, ali naj jo odpovedo. Taka odločitev jim prinese dobiček -20000 denot.
Če prireditev izvedejo imajo v odvisnosti od vremena dobiček, kot ga podaja prva tabela.
Stolpci druge tabele vsebujejo pogojne verjetnosti treh možnih napovedi pri deževnem, oblačnem in sončnem vremenu. Označimo deževno vreme z D, oblačno z O ter sončno z S, ustrezne napovedi pa z ND, NO ter NS. Tedaj so manjkajoče verjetnosti, ki jih potrebujemo za rešitev naloge, naslednje:

$$\begin{array}{llllll}
P[ND] & = P[ND/D]P[D] & +P[ND/O]P[O] & +P[ND/S]P[S] & = 0.19 \\
P[NO] & = P[NO/D]P[D] & +P[NO/O]P[O] & +P[NO/S]P[S] & = 0.32 \\
P[NS] & = P[NS/D]P[D] & +P[NS/O]P[O] & +P[NS/S]P[S] & = 0.49
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl}
P[D/ND] & = & \frac{P[ND/D]P[D]}{P[ND]} & = & \frac{7}{19} & \simeq & 0.368 \\
P[O/ND] & = & \frac{P[ND/O]P[O]}{P[ND]} & = & \frac{6}{19} & \simeq & 0.316 \\
P[S/ND] & = & \frac{P[ND/S]P[S]}{P[ND]} & = & \frac{6}{19} & \simeq & 0.316 \\
P[D/NO] & = & \frac{P[NO/D]P[D]}{P[NO]} & = & \frac{1}{16} & \simeq & 0.063 \\
P[O/NO] & = & \frac{P[NO/O]P[O]}{P[NO]} & = & \frac{9}{16} & \simeq & 0.563 \\
P[S/NO] & = & \frac{P[NO/S]P[S]}{P[NO]} & = & \frac{6}{16} & \simeq & 0.375 \\
P[D/NS] & = & \frac{P[NS/D]P[D]}{P[NS]} & = & \frac{1}{49} & \simeq & 0.020 \\
P[O/NS] & = & \frac{P[NS/O]P[O]}{P[NS]} & = & \frac{6}{49} & \simeq & 0.122 \\
P[S/NS] & = & \frac{P[NS/S]P[S]}{P[NS]} & = & \frac{42}{49} & \simeq & 0.857
\end{array}$$

Prireditev naj izvedejo v vsakem primeru, ne glede na napoved. Pri tem lahko pričakujejo dobiček 125000 denot.
Utemeljitev: če je napovedan dež lahko še vedno pričakujejo 42105 denot dobička, če je napovedano oblačno 96875 denot, v primeru sončne napovedi pa kar 175510 denot dobička.

2.6 Odločanje v skladu z večimi kriteriji – Saatyjeva metoda

6.2

a) Odloči naj se za jahto A.

b) $\frac{CI}{RI} = 0.028$

6.3 Janez naj gre v Portorož.
$\frac{CI}{RI} = 0.05,\ 0.07,\ 0.05$ po vrsti za *kriterije*, *šport* in *zabavo*.

6.4 Ukvarjati naj se začne z jadralnim padalstvom.
$\frac{CI}{RI} = 0.008$ Največjo neusklajenost povzroča primerjava (*razburljivost*, *zdravje*). Vrednost bi morala biti 3.302

2.7 Teorija iger

7.1 Igra nima sedla.
Prvi igralec dobiva v povprečju najmanj po $\frac{5}{2}$, če igra mešano strategijo $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; optimalna strategija drugega igralca je $q = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

7.2 Vrednost igre je $-\frac{1}{2}$. Igralca jo dosežeta, če igrata optimalni mešani strategiji $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ in $q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
Rešitev lahko poiščemo z rešitvijo naloge LP in njej dualne naloge.
Vsem matričnim elementom moramo prišteti dovolj veliko konstanto, da zagotovimo pozitivnost vrednosti igre. V tem primeru zadošča prišteti 3, saj so tedaj vsi elementi matrike nenegativni. S tem smo seveda povečali tudi vrednost v prvotne igre za 3, $v' = v + 3$.

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \begin{array}{rcrcl} 5x & & & \leq & 1, \\ & & 5y & \leq & 1, \\ 2x & + & 2y & \leq & 1, \\ x, & & y & \geq & 0 \end{array} \quad \} \\ P(x,y,z) & = & x + y \end{array}$$

Iz rešitve (Φ, P, Max) bomo razbrali optimalno strategijo drugega igralca in vrednost igre, iz rešitve dualne naloge pa optimalno strategijo prvega igralca. Če nalogo rešujemo s simpleksnim algoritmom, lahko iz končne simpleksne tabele razberemo rešitvi obeh dualnih si nalog LP.

$$Y = (x^*, y^*) \ = \ (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}), \quad P^* \ = \ \frac{2}{5}, \quad X = (u^*, v^*, w^*) \ = \ (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0)$$

Odtod razberemo vrednost igre $v' = \frac{1}{P^*} = \frac{5}{2}$,
optimalni strategiji drugega $q = v'Y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, in prvega igralca $p = v'X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Vrednost prvotne igre je tako $v = v' - 3 = -\frac{1}{2}$. Zamenjati moramo tudi vlogi igralcev, saj je prvi igralec igre, ki mo jo reševali, drugi igralec prvotne igre in obratno.

7.3 Vrednost igre je 1, optimalna strategija prvega igralca je $p = (0, 0, 1)$, optimalna strategije prvega igralca pa je katerakoli od strategij oblike $q = \left(\frac{2+\lambda}{5}, \frac{3-\lambda}{5}\right)$ kjer je $0 \leq \lambda \leq 1$.

7.5 Glej naslednjo nalogo.

7.6 Elementi plačilne matrike A so dobički prvega igralca

$$a_{i,j} \ = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ;\ i = j \\ \frac{i}{4} - \left(1 - \frac{i}{4}\right)\frac{j}{4} & ;\ i < j \\ -\frac{j}{4} + \left(1 - \frac{j}{4}\right)\frac{i}{4} & ;\ i > j \end{array} \right. \quad = \ \frac{i-j}{4} + \mathrm{sgn}(j-i)\frac{ij}{16}$$

Zaradi lepšega zapisa pomnožimo matriko A s 16. Matrika ima sedlo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Igra ima sedlo; vrednost igre je 0, rešitev pa $(0, 1, 0, 0)$ za oba igralca. Najbolj se torej obema izplača streljati na drugem koraku.

opomba: ker nastopata oba igralca v igri simetrično, imata seveda tudi oba enake možnosti. Formalno to zapišemo z $A^T = -A$: plačilna matrika je antisimetrična in je zato za oba igralca enaka. Zato je tudi vrednost igre lahko samo 0, rešitev pa je za oba igralca enaka.

7.7 *Nori Max* ima na voljo dve možnosti: potovati skozi Atlanto ali skozi Nashville, *Hudobna Čarovnica* pa lahko dve poti zapre na štiri načine. Izgubo *Norega Maxa* meri dolžina poti, ki meri tudi koristnost *Hudobne Čarovnice*, torej nalogo lahko opi"emo kot matrično igro dveh igralcev z ničelno vsoto. Plačilna matrika igre, katere elementi merijo izgubo prvega igralca – *Norega Maxa* in reševanje je razvidno iz

	A–SL N–SL	A–SL N–NO	A–NO N–SL	A–NO N–NO	$\max_j a_{i,j}$
A	1700	**1700**	1600	1600	<u>1700</u>
N	1400	1800	1400	1800	1800
$\min_i a_{i,j}$	1400	<u>1700</u>	1400	1700	

Nori Max naj torej potuje skozi Atlanto, *Hudobna Čarovnica* naj zapre poti Atlanta – St. Louis in Nashville – New Orleans, pri čemer bo *Nori Max* potoval 1700 milj.

7.8 Podobno kot pri *tihem dvoboju* je tudi tu igra simetrična, torej je rešitev lahko samo 0. Ker plačilna matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

nima sedla, iščemo rešitev igre (mešano strategijo) z uporabo linearnega programiranja. Pred tem ne smemo pozabiti matriki prišteti pozitivnega števila. Naloga ima več rešitev, ki ležijo na daljici $\overline{AB}$, kjer je

$$A = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0\right) \quad \text{in} \quad B = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Vsak od igralcev torej lahko izbere katerokoli strategijo oblike $\lambda A + (1 - \lambda)B$, kjer je $\lambda \in [0, 1]$.

7.9 Igra nima sedla.
Prvi igralec dobiva v povprečju najmanj po $\frac{5}{2}$, če igra mešano strategijo $q = \left(\frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right)$; optimalna strategija drugega igralca je $p = (\left(0, \frac{7}{13}, \frac{6}{13}\right)$.

7.10 Elementi plačilne matrike so na primer števila kupcev, ki kupujejo pri prvem podjetju. Igra je ima sedlo. Obema podjetjema se najbolj izplača odpreti trgovino v kraju B. Pri tem vsako lahko pričakuje po 26 kupcev.

7.11 Vsako od podjetij naj postavi trgovino v vaseh A ali B, pri tem pa obe lahko pričakujeta po 50, to je polovico vseh kupcev.

7.12 Obe podjetji sta očitno v enakem položaju, torej lahko igro predstavimo s plačilno matriko, ki zadošča pogoju antisimetričnosti ($A^T = -A$). Vrednost igre je zato enaka 0, optimalni strategiji obeh igralcev pa sta enaki.

A	B	C	D
0	$\frac{b}{2}-10$	10	$30-\frac{b}{2}$
$10-\frac{b}{2}$	0	$30-\frac{b}{2}$	$20-\frac{b}{2}$
-10	$\frac{b}{2}-30$	0	$10-\frac{b}{2}$
$\frac{b}{2}-30$	$\frac{b}{2}-20$	$\frac{b}{2}-10$	0

Obravnavamo pri različnih vrednostih parametra b:

- če je $b \leq 20$ se izplača postaviti trgovino v vas A,
- če je $20 \leq b \leq 60$ v vas A,
- če je $b \geq 60$ pa v vas D.
- V vas C se nikakor nr izplača postaviti trgovine.

7.13 Igra ima sedlo, vrednost igre je 0, optimalna strategija vsakega od igralcev pa je $p = q = (0, 1, 0)$

2.8 Generator naključnih števil

8.1 Časi pogovorov so porazdeljeni po eksponentnem zakonu z $\lambda = 0.01104\, s^{-1}$.
`Trajanje := -(1/lambda)*Ln(1-Random)`, kjer funkcija `Random` vrača naključna števila, porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1)$.

8.2 `x := 2*Sqrt(Sqrt(Random))-1`, kjer je `Random` naključno število, porazdeljeno enakomerno na intervalu med 0 in 1.

8.3

```
Y := Random;
if Y <= 1/2 then
  return( 2*Y )
else
  return( 3 - 2*Sqrt( 2 - 2*Y ) );
```

8.4 $a = \frac{2}{3}$.

```
Y := Random;
if Y <= 1/3 then
  return( Sqrt( 3*Y ) )
else
  return( 1 + Ln( 2/( 3*( 1 - Y ) ) ) );
```

8.5 $c = 4$.
`X := Sqrt( 1 - Sqrt( 1 - Random ) )`

8.8

```
Y := Random;
if Y <= 1/2 then
  return( 0 )
else
  return( ( 2*Y - 1 )/( 1 - Y ) );
```

8.9 Naj bo R slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1)$, torej neke vrste običajni `Random`. Problem lahko rešimo tako, da poiščemo tako funkcijo f, da je slučajna spremenljivka $Y = f(R)$ porazdeljena z zvezno gostoto porazdelitve g. Mimogrede naj še omenimo, da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ ter da je gostota g koncentrirana na intervalu $[2, 6]$.

Iščemo naraščajočo funkcijo $f : [0,1] \longrightarrow [2,6]$, pri čemer dobljena slučajna spremenljivka Y ne bo nikoli vrnila vrednosti 6, medtem ko bi jo morala vračati z verjetnostjo 0. Do razlike pride pri računanju s končno natančnostjo, kjer so števila v resnici porazdeljena diskretno in bi tedaj tudi verjetnost $P[Y = 6]$ v skladsu s formulacijo naloge morala biti različna od 0.
Če za zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki Y in R velja zveza $Y = f(R)$ in je f naraščajoča, tedaj za njuna porazdelitveni funkciji F_Y in F_R velja naslednja zveza:

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ F_Y(t) \ = \ P[Y < t] \ = \ P[f(R) < t] \ = \ P[R < f^{-1}(t)] \ = \ F_R(f^{-1}(t))$$

Ker je nadalje R porazdeljena enakomerno na intervalu $[0,1)$, velja za $x \in [0,1]$ zveza $F_R(x) = x$, torej je desna stran prejšnje enakosti enaka $f^{-1}(t)$ za $t \in [2,6]$. Levo stran že omenjene enakosti zapišemo z ustreznim integralom in odtod dobimo

$$\forall t \in [2,6] \ : \ f^{-1}(t) \ = \ \int_2^t g(x)dx \ = \ \begin{cases} \int_2^t \frac{x}{2} - 1dx & \text{za } 2 \le t \le 3 \\ \int_2^3 \frac{x}{2} - 1dx \ + \ \int_3^t 1 - \frac{x}{6}dx & \text{za } 3 < t \le 6 \end{cases} \ = \ \begin{cases} \frac{t^2}{4} - t + 1 \\ -\frac{t^2}{12} + t - 2 \end{cases}$$

Inverzno funkcijo f funkcije f^{-1} poiščemo iz zveze

$$f^{-1}(t) \ = \ x \quad \Longleftrightarrow \quad t \ = \ f(x)$$

torej je potrebno izraziti t iz zveze

$$x \ = \ \begin{cases} \frac{t^2}{4} - t + 1 & \text{za } 2 \le t \le 3 \\ -\frac{t^2}{12} + t - 2 & \text{za } 3 < t \le 6 \end{cases}$$

Ker je f^{-1} opisana na podintervalu $[2,3]$ z drugo formulo kot na $[3,6]$, na vsakem od delnih intervalov posebej izražamo t.
Za $t \in [2,3]$ je $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Iz zveze $x = \frac{t^2}{4} - t + 1$ dobimo $t = 2 \pm 2\sqrt{x}$, kar mora ležati na intervalu $[2,3]$. Zaradi $x \in [0, \frac{1}{4}]$ pride v poštev le "+", torej $t = 2 + 2\sqrt{x}$.
Za $t \in [3,6]$ je $x \in [\frac{1}{4}, 1]$. Iz zveze $x = -\frac{t^2}{12} + t - 2$ dobimo $t = 6 \pm 2\sqrt{3(1-x)}$, kar mora ležati na intervalu $[3,6]$. Zaradi $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ pride po podobnem premisleku kot prej v poštev le "$-$", torej $t = 6 - 2\sqrt{3(1-x)}$.
Sklep: člen zaporedja dobimo tako, da vzamemo `x := R`, kjer `R` vrača naključna števila porazdeljena enakomerno na intervalu $[0,1)$, nato pa izračunamo vrednost funkcije f v tako dobljenem x:

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 2 + 2\sqrt{x} & \text{za } x \le \frac{1}{4} \\ 6 - 2\sqrt{3(1-x)} & \text{sicer} \end{cases}$$

in se ne sekiramo zaradi nepojavitve števila 6 v tako dobljenem zaporedju.

8.10 Poissonova porazdelitev z $\lambda = 3$.

```
p := EXP(-lambda) \% p je verjetnost(i)\\
s[0] := p \% s je porazdelitvena funkcija\\
r := RND; \% realno število med 0 vključno in 1 izključno\\
i := 0;
while r > s[i] do
```

```
    i := i + 1;\\
    p := p*lambda/i\\
    s[i] := s[i-1] + p\\
  Return(i)\\
```

8.11 $b = \frac{3}{a^3}$.

$$F(r) \;=\; a\sqrt{1 - \sqrt[3]{(1-r)^2}}$$

8.13 $c = \frac{a}{\ln 2}$.

$$Z \;=\; \frac{1}{a} \ln \frac{-2^{r-1}}{2^{r-1} - 1}$$

8.15 $a = \frac{3}{2}$.

```
Y := Random;
if Y <= 1/2 then
  Return( ( 2*Y - 1 )^(1/3) )
else
  Return( 1 - Sqrt( 2 - 2*Y ) );
```

8.16 $a = \frac{2}{3}$.

```
Y := Random;
if Y <= 4/9 then
  Return( 1 - Sqrt( 1 - 2*Y ) )
else
  Return( Sqrt( Y ) );
```

8.18 Iz grafa razberemo gostoto porazdelitve

$$g(t) \;=\; \begin{cases} \frac{d}{a}t & ; 0 \le t < a \\ d & ; a \le t < b \\ \frac{d}{c-b}(c-t) & ; b \le t < c \\ 0 & ; sicer \end{cases}$$

$d = \frac{2}{c+b-a}$.

2.9 Kritična pot in PERT

9.2

opravilo	ES	LS	EF	LF	
1-2	0	0	4	4	0
1-3	0	1	6	7	1
2-3	4	4	7	7	0
2-4	4	5	10	11	1
2-5	4	4	9	9	0
3-5	7	7	9	9	0
3-6	7	8	14	15	1
4-6	10	11	14	15	1
5-6	9	9	15	15	0
5-7	9	10	15	16	1
6-7	15	15	16	16	0

pot	čas	
1-2-4-6-7	:	15
1-2-5-7	:	15
1-2-5-6-7	:	$\underline{16}$
1-2-3-5-7	:	15
1-2-3-5-6-7	:	$\underline{16}$
1-3-5-7	:	14
1-3-5-6-7	:	15
1-3-6-7	:	14

Opomba: kot je razvidno iz rešitve, sta kritični poti dve.

9.3

a) Kritična pot je $1-2-3-4-5-6-8$, $T_E = 23.67$, $\sigma = 1.75$

9.4

a)

b)

aktivnost	T_i	σ_i^2
$1-2$	$\frac{31}{6}$	$\frac{1}{4}$
$2-3$	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{4}$
$2-6$	$\frac{22}{3}$	1
$3-4$	2	0
$3-5$	$\frac{25}{6}$	$\frac{1}{4}$
$4-5$	$\frac{29}{6}$	$\frac{1}{4}$
$6-7$	2	0
$6-8$	3	0
$7-8$	0	0
$5-9$	$\frac{35}{6}$	$\frac{1}{4}$
$8-9$	$\frac{25}{6}$	$\frac{1}{4}$

c) Kritična pot je 1-2-3-4-5-9; $T_E = 21$, $\sigma = 1$.

9.5 Če podjetje razporedi $x \in \{0, 1, ...10\}$ delavcev na opravilo 2-4, preostalih $10 - x$ delacev pa na opravilo 3-5, traja opravilo 2-4 $\frac{6}{x}$ dni, opravilo 3-5 pa $\frac{7}{10-x}$ dni.
Za dokončanje projekta je potrebno najmanj 9 dni.
Ta najkrajši čas dosežejo, če na opravilo 2-4 razporedijo vsaj 4, na opravilo 3-5 pa vsaj 3 delavce.

9.6 Kritična pot je A–B–F, pričakovani čas je $T_E = 15.33$, disperzija pa $\sigma = 2.014$. Verjetnost, da bo projekt končan najkasneje v 14 dnevih, znaša $\Phi(-0.655) = 1 - \Phi(0.655) \simeq 0.256$

9.7 Kritična pot je 1-3-6-8-10, trajanje projekta pa je 20 tednov.

9.8 Kritična pot je 1-2-3-4-5-6-8, trajanje projekta pa je 23 dni.

9.9 Kritična pot je 1-2-3-$_{\text{daljša}}$, pričakovano trajanje priprav pa je 14 dni.
S pripravami morajo začeti najkasneje 17 dni in 13 ur pred zahtevanim rokom, to je 13. junija ob enajstih.

9.10 Kritična pot je A-C-D-G-I, povprečno trajanje pa 37.17, verjetnost pa znaša 0.873.

2.10 Problem zalog

3. Kazalo

Kazalo

Zbirka je, kot vidite, še v zelo surovem stanju, polna napak in pomanjkljivosti. Kljub temu avtorja upava, da Vam je v pomoč.

Avtorja bi Vam bila zelo hvaležna, če bi nama bili pripravljeni pomagati s svojimi pripombami in nasveti v zvezi z njo. Morda pogrešate naloge iz nekaterih področij, še posebej pa enostavnejše uvodne naloge k vsaki od tem. Vsekakor so vaše pripombe dobrodošle. Če se bo le dalo, jih bova upoštevala v naslednji, upava da ne več poskusni izdaji zbirke.

Svoje pripombe lahko oddate osebno ali pri vratarju na Jadranski 19. Za Vaš trud se Vam vnaprej lepo zahvaljujeva.

V. Batagelj M. Kaufman