WiseGorilla

Univerza v Ljubljani
FMF, matematika

Operacijske raziskave

Merjenja

Vladimir Batagelj

Prosojnice

Kazalo

1 Začetki teorije merjenja 1
11 Osnove teorije merjenja 11
12 Osnovna merjenja 12
28 Merjenje koristnosti 28
39 Števni primer 39
42 Izpeljane lestvice 42
45 Psihofizični zakoni 45

Začetki teorije merjenja

Merjenje je sprejemanje podatkov o stanjih v okolju in omogoča živim bitjem preživetje. Večina živih bitij najbrž loči stanja:

premrzlo, mrzlo, hladno, prijetno, toplo, vroče, prevroče

Nekatere vrste je razvoj usposobil, da zaznavajo za ljudi nezaznavna stanja: netopirji – oddaljenost ovir v temi, žuželke – drugi deli svetlobnega spektra, psi – izostren vonj ...Povečano ultravijolično sevanje človek opazi šele posredno v obliki opeklin. Z razvojem znanosti je človek ustvaril merilna sredstva (mikroskop, spektrometri, radar, statistična služba ...), ki mu omogočajo zelo natančno opazovati tudi sicer neopazna dogajanja.

Začetki

Strokovnjaki trdijo, da smo ljudje edina vrsta, ki zna šteti. Poleg štetja smo se že v pradavnini naučili meriti dolžino, ploščino, prostornino, težo, čas ... Poljedelski narodi ob veletokih (Mezopotamija, Egipt, Indija, Kitajska) so že vedeli, da lahko za posamezne like in telesa, če poznamo dolžine značilnih sestavin, izračunamo njihove ploščine oziroma prostornine – izpeljana merjenja.

Stari grki

Stari grki so začetniki matematike v današnjem pomenu. Njihova glavna prispevka v zvezi z merjenji sta *Arhimedov aksiom*

> Za vsak par neizrojenih daljic AB in CD obstaja tako naravno število n, da je $\overline{CD} < n\overline{AB}$.

in spoznanje, da obstajajo nesoizmerljive količine – poleg racionalnih števil obstajajo še druga, npr. $\sqrt{2}$.

Fizikalna merjenja

Potrebo po izpopolnjeni teoriji merjenja je prinesel razvoj znanosti in tehnike, ki je v 18. in 19. stoletju spremljal prehod v industrijske družbe. Konec prejšnjega stoletja sta Helmholtz (1887) in Hölder (1901) postavila začetke sodobne teorije merjenja z izgradnjo teorije fizikalnih merjenj. Poglejmo si njun pristop.

Izhajamo iz množice (vrst) *objektov* $\mathcal{O}$. Naj bo na njej dana linearna urejenost $\succeq$, ki odraža merjeno lastnost P:

$$a \succeq b \equiv a \text{ je vsaj tako } P \text{ kot } b$$

in dvočlena operacija $*$, ki ustreza združevanju objektov. Objektov, ki so glede na P enaki $\approx$, med seboj ne ločimo. Vpeljimo še okrajšavo

$$a \succ b \equiv (a \succeq b) \wedge (a \not\approx b).$$

Zgledi

Zgled: Tehtanje: $\mathcal{O}$ je množica vrst predmetov.

$$a \succeq b \equiv a \text{ je vsaj tako težek kot } b$$

Relacijo $\succeq$ preverjamo z ravnotežno tehtnico. $a * b$ ustreza postavitvi objektov a in b na isto stran tehtnice. $\square$

Zgled: Merjenje dolžin: $\mathcal{O}$ je množica vrst palic.

$$a \succeq b \equiv a \text{ je vsaj tako dolga kot } b$$

Relacijo $\succeq$ preverjamo tako, da postavimo eno daljico ob drugo. $a * b$ ustreza stikanju daljic a in b. $\square$

Lastnosti operacije

Od operacije $*$ zahtevamo, da zadošča pogojem:

komutativnost	$a * b = b * a$
asociativnost	$a * (b * c) = (a * b) * c$
pozitivnost	$a * b \succ a$

Za asociativno operacijo lahko enolično vpeljemo pojem *potence*

$$na \equiv \underbrace{a * a * a * \cdots * a}_{n},$$

ki nam omogoči izraziti še en pogoj

arhimedskost	$\forall a, b \in \mathcal{O} \exists n \in \mathbb{N}^+ : na \succ b$

Lastnosti operacije

Mera lastnosti P opisane z relacijo $\succeq$ je preslikava $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, ki zadošča pogojem:

usklajenost	$a \succeq b \Leftrightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$
homogenost	$\varphi(na) = n\varphi(a)$
obstoj enote	$\exists u \in \mathcal{O} : \varphi(u) = 1$

Poljubno natančno merjenje

Pokažimo, da lahko pri teh predpostavkah za vsak objekt $a \in \mathcal{O}$ izmerimo $\varphi(a)$ poljubno natančno.

Če je $a \approx u$, je $\varphi(a) = 1$. Oglejmo si najprej primer, ko je $a \succ u$. Tedaj obstaja natančno določeno naravno število $k \in \mathbb{N}$, tako da je $(k+1)u \succeq a \succ ku$. Od tu izhaja

$$k+1 = (k+1)\varphi(u) = \varphi((k+1)u) \geq \varphi(a) > \varphi(ku) = k\varphi(u) = k.$$

Torej velja $k+1 \geq \varphi(a) > k$. Poglejmo sedaj objekt $2a$. Zanj po prejšnjem razmisleku velja natanko ena izmed možnosti

$$2k+2 \geq \varphi(2a) > 2k+1 \quad \text{ali} \quad 2k+1 \geq \varphi(2a) > 2k$$

oziroma $k+1 \geq \varphi(a) > k + \frac{1}{2} \quad \text{ali} \quad k + \frac{1}{2} \geq \varphi(a) > k$.

Vrednost $\varphi(a)$ smo določili še enkrat natančneje. Ta postopek lahko poljubnokrat ponovimo – vrednost $\varphi(a)$ lahko določimo poljubno natančno.

... Poljubno natančno merjenje

V preostalem primeru, ko je $u \succ a$, pa obstaja $n \in \mathbb{N}^+$, tako da je $na \succ u$. V zadnjem odstavku smo pokazali, da lahko $\varphi(na)$ izmerimo poljubno natančno – torej tudi $\varphi(a) = \frac{1}{n}\varphi(na)$.

Pokazati je mogoče tudi, da velja

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Povzemimo: pri fizikalnih merjenjih, ki zadoščajo gornjim predpostavkam, je mera $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *homomorfizem* opazovanega sistema $\Phi = (\mathcal{O}, \succeq, *)$ v številski sistem $\Sigma = (\mathbb{R}^+, \geq, +)$.

Seveda je mera φ odvisna od izbire enote u in bi jo morali pravzaprav označevati s φ_u. Za mero φ_v, ki ustreza izbiri druge enote $v \in \mathcal{O}$, velja zveza

$$\varphi_v(a) = \varphi_v(u)\varphi_u(a)$$

Merjenja v ’mehkih’ vedah

Helmholtzov in Hölderjev pristop je še izpopolnil Campbell (1920). Vendar je bil pretog za novoporajajoče se vede (biologija, psihologija, sociologija, …), v katerih večkrat poskušamo meriti tudi občutke. Pri takih merjenih operacija $*$ nima pravega pomena. Zato je bila leta 1932 pri *British Association for the Advancement of Science* ustanovljena posebna skupina, ki naj prouči možnost merjenja čutnih dogodkov. Njeni člani niti v končnem poročilu leta 1940 niso uspeli popolnoma uskladiti svojih pogledov. Rešitev iz zagate je leta 1946, s člankom objavljenim v reviji *Science*, ponudil član skupine, psiholog S.S. Stevens. Njegove zamisli so naprej razvijali Suppes, Scott, Zinnes, Pfanzagl, Krantz, Luce, Tversky, Roberts, Narens, … V nadaljevanju bomo spoznali osnovne pojme in dosežke teh prizadevanj. Rezultati teh raziskav so zbrani in urejeni v nekaj knjigah.

Osnove teorije merjenja

Ločimo osnovna merjenja in izpeljana merjenja. *Osnovna merjenja* se nanašajo na začetna merjenja osnovnih količin, kot sta na primer v fiziki masa in prostornina. *Izpeljana merjenja* srečamo kasneje, ko nove količine opredelimo z že znanimi in izmerjenimi količinami. Na primer, gostoto, kot razmerje med maso in prostornino. Poglejmo si najprej osnovna merjenja.

Osnovna merjenja

Običajno, čeprav vedno ni tako, razumemo pod merjenjem nekaj, kar je povezano s prirejanjem števil. Če pogledamo na merjenja v fiziki, opazimo, da gre za "prirejanje" števil, ki ohranja določene odnose, ki jih lahko opazimo. Tako je na primer merjenje mase prirejanje števil, ki ohranja relacijo "je težji". Natančneje, naj bo $\mathcal{O}$ množica objektov, ki jih postavljamo na tehtnico in T relacija "je težji". Tedaj bi radi vsakemu objektu $a \in \mathcal{O}$ priredili realno število $m(a)$, tako da bo za vsak par objektov $a, b \in \mathcal{O}$ veljalo:

$$aTb \Leftrightarrow m(a) > m(b)$$

. . . Osnovna merjenja

Podobno velja tudi v družbenih vedah. Merjenje preferenc je prirejanje števil, ki ohranja relacijo "imam rajši kot". Označimo z $\mathcal{A}$ množico alternativ in s P relacijo "imam (strogo) rajši kot", potem bi radi dobili funkcijo $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tako da bo za vsak par $a, b \in \mathcal{A}$ veljalo:

$$aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$$

Funkciji u pravimo navadno *koristnost* (utility).

Na podoben način mera glasnosti ohranja relacijo "je glasnejši od", . . .

...Osnovna merjenja

Povrnimo se na merjenje mase. Dejansko zahtevamo od mere za maso več, kot to da ohranja relacijo T. Želimo, da je aditivna - da je masa sestava $a * b$ objektov a in b enaka vsoti mas teh dveh objektov:

$$m(a * b) = m(a) + m(b)$$

Torej želimo, da mera za maso ohranja tudi operacijo $*$. Za operacijo $*$ predpostavljamo, da je asociativna, in da imamo na voljo poljubno primerkov posameznega objekta, tako da ni problemov s pomenom izraza $a * a$.

Relacijski sistem

Posplošimo: *Relacijski sistem* imenujemo urejeno n-terko:

$$\Phi = (A, R_1, R_2, \ldots, R_p, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_q)$$

kjer je A množica, R_k so relacije in $\circ_j$ (dvomestne) operacije na A. Tip sistema imenujemo $p+1$-terko $(m_1, m_2, \ldots, m_p; q)$, kjer je m_k mestnost relacije R_k. Tako ima sistem $(A, T, *)$ tip $(2; 1)$. Kadar je $A \subseteq \mathbb{R}$, pravimo, da je sistem *številski*.

V našem primeru z merjenjem mase smo videli, da začnemo z nekim empiričnim relacijskim sistemom Φ in iščemo preslikavo tega sistema v nek številski relacijski sistem Σ. Pri tem zahtevamo, da preslikava "ohranja" vse relacije in operacije sistema Φ. V primeru mase je $\Phi = (\mathcal{O}, T, *)$ in $\Sigma = (\mathbb{R}, >, +)$.

Homomorfizem

Preslikavo enega relacijskega sistema v drugega, ki “ohranja” vse relacije in operacije prvega sistema imenujemo v matematiki homomorfizem. Natančneje: imejmo relacijska sistema istega tipa:

$$\Phi = (A, R_1, R_2, \ldots, R_p, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_q)$$

in

$$\Sigma = (B, Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, \star_1, \star_2, \ldots, \star_q)$$

Preslikavo $f : A \to B$ imenujemo *homomorfizem* sistema Φ v sistem Σ natanko takrat, ko za vsak $k = 1, 2, \ldots, p$ in za vsak nabor $a_1, a_2, \ldots, a_{m_k}$ elementov iz A velja

$$R_k(a_1, a_2, \ldots, a_{m_k}) \Leftrightarrow Q_k(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{m_k}))$$

ter za vsak $k = 1, 2, \ldots, q$ in vsak par $a, b \in A$ velja

$$f(a \circ_k b) = f(a) \star_k f(b)$$

Zgled: Preslikava $f : x \mapsto e^x$ je homomorfizem iz $\Phi = (\mathbb{R}, >, +)$ v $\Sigma = (\mathbb{R}^+, >, .)$. $\square$

Osnovna merjenja

Pojem homomorfizma nam omogoča definirati pojem osnovnega merjenja.

Osnovno merjenje je določeno s homomorfizmom med opazovanim (empiričnim) relacijskim sistemom Φ in izbranim številskim relacijskim sistemom Σ. Pravimo tudi, da homomorfizem določa *predstavitev* sistema Φ v Σ. Urejeno trojico (Φ, Σ, f) imenujemo tudi *merska lestvica*; včasih pa ta termin nekoliko ohlapno uporabljamo tudi za samo preslikavo f. Tako je na primer merjenje mase homomorfizem iz opazovanega sistema $\Phi = (\mathcal{O}, T, *)$ v številski sistem $\Sigma = (\mathbb{R}, >, +)$.

Predstavitveni problem

Osnovni problem teorije merjenja je *predstavitveni problem*: Določi zadostne (in, če je mogoče, tudi potrebne) pogoje za to, da lahko nek opazovani relacijski sistem predstavimo v izbranem številskem sistemu. Ti pogoji morajo biti nekako "empirično preverljivi".

Izrek, ki zagotavlja zadostnost pogojev, pravimo jim tudi *aksiomi*, imenujemo navadno *predstavitveni izrek* in ga, če je le mogoče, konstruktivno dokažemo – izrek ne zagotavlja le obstoja predstavitve, temveč tudi pove, kako do nje pridemo.

Poglejmo si primer takega merskega aksioma. Recimo, da nas zanima ali obstaja homomorfizem iz (A, R) v $(\mathbb{R}, >)$. Če bi obstajal tak homomorfizem $f : A \to \mathbb{R}$, zanj velja $aRb \Leftrightarrow f(a) > f(b)$. Tedaj iz predpostavk aRb in bRc izhaja $f(a) > f(b)$ in $f(b) > f(c)$ ter naprej po tranzitivnosti relacije večji $f(a) > f(c)$, kar je enakovredno aRc. Tako dobimo zahtevo/aksiom: relacija R je tranzitivna.

Problem enoličnosti

Drugi problem je *problem enoličnosti*: Kako natančno je homomorfizem določen?

Predstavitev $\Phi \to \Sigma$ sistema Φ v Σ lahko opišemo z množico lestvic

$$\Phi \to \Sigma = \{f : (\Phi, \Sigma, f) \text{ je merska lestvica}\},$$

ki jim včasih rečemo tudi *nadomestne*.

Naj bo (Φ, Σ, f) merska lestvica in preslikava $\varphi : f(A) \to \mathbb{R}$. Pravimo, da je preslikava φ *dopustna transformacija* lestvice, če je tudi trojica $(\Phi, \Sigma, \varphi \circ f)$ merska lestvica; ali drugače povedano, če je tudi $\varphi \circ f$ homomorfizem iz Φ v Σ.

Regularne lestvice

Lestvica (Φ, Σ, f) je *regularna*, če za vsako drugo mersko lestvico (Φ, Σ, g) obstaja dopustna transformacija $\varphi : f(A) \to \mathbb{R}$, tako da velja $g = \varphi \circ f$. Če pa vsak homomorfizem iz Φ v Σ določa regularno lestvico, pravimo, da je $\Phi \to \Sigma$ *regularna* predstavitev. Tako preslikavo je vedno mogoče določiti, če je f povratno enolična. Funkcija $\varphi = g \circ f^{-1}$ zadošča postavljenim zahtevam.

IZREK 1 *Lestvica (Φ, Σ, f) je regularna natanko takrat, ko za vsako nadomestno lestvico g in za vse $a, b \in A$ velja*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g(a) = g(b)$$

Dokaz izreka

Naj bo f regularna lestvica. Tedaj obstaja za vsako nadomestno lestvico g dopustna transformacija $\varphi : f(A) \to \mathbb{R}$, tako da je $g = \varphi \circ f$. Torej iz $f(a) = f(b)$ izhaja

$$g(a) = \varphi(f(a)) = \varphi(f(b)) = g(b)$$

V nasprotno smer sklepamo takole. Vzemimo poljuben $x \in f(A)$. Tedaj obstaja vsaj en $a \in A$, tako da je $x = f(a)$. Definirajmo funkcijo $\varphi : f(A) \to \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(x) = g(a)$. Preverimo še, da je φ dobro definirana – neodvisna od izbire elementa $a \in A$. Recimo, da bi obstajal še kak element $b \in A$, tako da je $x = f(b)$. Tedaj iz $x = f(a) = f(b)$ izhaja $g(a) = g(b) = \varphi(x)$ – vrednost funkcije φ je res dobro definirana.

Vrste lestvic

Vsak razred dopustnih transformacij določa neko *vrsto lestvice*. V tabeli na naslednji prosojnici je podanih nekaj vrst lestvic, ki jih najpogosteje srečamo v praksi.

Navedeni tipi lestvic so takole vsebovani eden v drugemu:

$$\text{absolutna} \subset \text{razmernostna} \subset \text{intervalna} \subset \text{urejenostna} \subset \text{imenska}$$

IZREK 2 *Če je predstavitev $\Phi \to \Sigma$ regularna in sta f in g pripadajoča homomorfizma, potem sta za vse tipe iz tabele* **??** *f in g istega tipa.*

Vrste lestvic

dovoljene transformacije	**vrsta lestvice**	**primeri**
$\varphi(x) = x$ (identiteta)	absolutna	štetje
$\varphi(x) = a.x, a > 0$ podobnost	razmernostna	masa temperatura (K)
$\varphi(x) = a.x + b, a > 0$	razmična	temperatura (C,F) čas (koledar)
$x \geq y \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$ strogo naraščajoča	urejenostna	šolske ocene, kakovost zraka, trdost kamnin
φ je povratno enolična	imenska	barva las, narodnost
$\varphi(x) = a.x^b, a > 0$	log-intervalna	
$\varphi(x) = x + b$	diferenčna	

Smiselni stavki

Pojem regularnosti je pomemben pri opredelitvi "smiselnih" stavkov. Intuitivno je stavek, ki govori o merskih lestvicah, smiseln, če se njegova resničnost/lažnost ne spremeni, če posamezno lestvico povsod zamenjamo z neko drugo nadomestno lestvico. Če pa se omejimo le na lestvice, ki pripadajo regularnim predstavitvam, lahko pojem smiselnega stavka natančneje opišemo:

Stavek, ki govori o merskih lestvicah je *smiseln*, če se njegova resničnost/lažnost ne spremeni pri dopustnih transformacijah merskih lestvic.

Ponazorimo sedaj s primerom pojem smiselnega stavka.

. . . Smiselni stavki

Recimo, da smo na vzorcu A z n elementi in vzorcu B z m elementi na vsakem elementu izmerili neko lastnost glede na lestvico f (recimo težo rastlin na dveh različno gnojenih njivah). Oglejmo si stavek (izjavo):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i) > \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} f(b_i)$$

ki označuje primerjavo povprečij izračunanih na dveh različnih množicah. Stavek je smiselen, če za vsako dopustno transformacijo φ velja:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi \circ f(a_i) > \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \varphi \circ f(b_i)$$

. . . Smiselni stavki

Preprost račun pokaže, da je za pozitivne linearne transformacije $\varphi(x) = \alpha.x + \beta, \alpha > 0$ neenakost

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha.f(a_i)+\beta) > \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\alpha.f(b_i)+\beta)$$

izpolnjena natanko takrat, ko je izpolnjena prva neenakost. Torej je stavek smiseln za intervalne lestvice; za urejenostne lestvice pa je razmeroma preprosto sestaviti protiprimer.

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
I	1	4	5	1	5
II	1	2	5	1	5

Opomba: mediana, moda; geometrijska sredina (Φ, Σ, f_i).

Merjenje koristnosti

Najpreprostejši primer merjenja koristnosti imamo, ko je opazovani sistem določen z dvomestno relacijo P na množici objektov A. Postavi se vprašanje, kdaj lahko najdemo preslikavo $u : A \to \mathbb{R}$, tako da bo za vsak par $a, b \in A$ veljalo: $aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$?

Tedaj je preslikava u homorfizem sistema (A, P) v številski sistem $(\mathbb{R}, >)$.

Pokazati je mogoče, da velja izrek:

IZREK 3 *Naj bo množica A končna in P dvomestna relacija na A, potem obstaja preslikava $u : A \to \mathbb{R}$, tako da bo za vsak par $a, b \in A$ veljalo:*

$$aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$$

natanko takrat, ko je relacija P stroga šibka urejenost *– torej, ko je:*

asimetrična:	$\forall a, b \in \mathcal{A} : \neg(aPb \wedge bPa)$
negativno tranzitivna:	$\forall a, b, c \in \mathcal{A} : (\neg aPb \wedge \neg bPc \Rightarrow \neg aPc)$

. . . Merjenje koristnosti – dokaz

Pokažimo najprej: če obstaja preslikava u, je z njo določena relacija P stroga šibka urejenost.

Preverimo veljavnost obeh lastnosti. Pri tem upoštevajmo $\neg aPb \Leftrightarrow u(a) \leq u(b)$.

- asimetričnost: če P ni asimetrična, obstajata $a, b \in A$ tako da velja aPb in bPa. Od tu izhaja, da bi moralo veljati tudi $u(a) < u(b)$ in $u(b) < u(a)$; kar ni mogoče.
- negativna tranzitivnost: $\neg aPb \wedge \neg bPc \Rightarrow u(a) \leq u(b) \wedge u(b) \leq u(c) \sim u(a) \leq u(c) \Rightarrow \neg aPc$

Dokažimo trditev še v nasprotno smer: če je relacija P stroga šibka urejenost, obstaja funkcija u, ki zadošča izreku. Pokazali bomo, da je taka funkcija kar $u(a) = \mathrm{card}(P(a))$.

Pri tem nam bo v precejšno pomoč ugotovitev, da je relacija P tranzitivna, v katero se prepričamo takole:

. . . Merjenje koristnosti – dokaz

Predpostavimo nasprotno: obstajajo $a, b, c \in A$, tako da je $aPb \wedge bPc \wedge \neg aPc$. Tedaj je zaradi asimetričnosti $\neg cPb$, in zaradi negativne tranzitivnosti tudi $\neg aPb$; kar je v protislovju s predpostavko aPb.

Iz tranzitivnosti in irefleksivnosti izhaja $aPb \Rightarrow P(b) \subset P(a)$: vzemimo poljuben $x \in P(b)$, tedaj je bPx in po predpostavki aPb. Po tranzitivnosti je zato aPx oziroma $x \in P(a)$. Torej je res $P(b) \subseteq P(a)$. Ker je $b \notin P(b)$ in $b \in P(a)$, je vsebovanost stroga. Za izbrano funkcijo u potemtakem res velja $aPb \Rightarrow u(a) > u(b)$.

Pokažimo, da velja tudi $u(a) > u(b) \Rightarrow aPb$ ali enakovredno $\neg aPb \Rightarrow u(a) \leq u(b)$. Za to zadostuje, da pokažemo, da pri predpostavki $\neg aPb$ velja $P(a) \subseteq P(b)$ oziroma $x \in P(a) \Rightarrow x \in P(b)$ oziroma $aPx \Rightarrow bPx$ oziroma $\neg bPx \Rightarrow \neg aPx$. Slednje izhaja iz predpostavke $\neg aPb$ po negativni tranzitivnosti.

. . . Merjenje koristnosti

Relacijo P določimo z zastavljanjem vprašanj v obliki primerjanj parov alternativ. To običajno počnemo v naključnem vrstnem redu. Rezultate uredimo v tabelo. Za primer vzemimo tabelo relacije:

$$aPb \equiv \text{raje obiščem kraj } a \text{ kot kraj } b$$

na naslednji prosojnici.

Iz tabele preverimo veljavnost aksiomov (asimetričnost in negativna tranzitivnost), in če so izpolnjeni določimo preslikavo u. V tem primeru govorimo o *opisnem pristopu*.

Relacija ljubšosti (preferenčna)

	Rim	London	Atene	Moskva	Pariz	Oslo	Dunaj
Rim	0	1	1	1	0	1	1
London	0	0	0	0	0	1	0
Atene	0	1	0	1	0	1	1
Moskva	0	1	0	0	0	1	0
Pariz	0	1	1	1	0	1	1
Oslo	0	0	0	0	0	0	0
Dunaj	0	1	0	0	0	1	0

Normativni pristop

Mogoč pa je še drug pogled na aksiome – določajo racionalnost odločevalca. Če so njegovi odgovori v nasprotju z aksiomi, je odgovarjal neracionalno. Govorimo tudi o *normativnem pristopu*. Ta pristop je posebej primeren za računalniško podprto vpraševanje. Najbrž bo uporabnik, ko ga program opozori na primer nasprotja "priznal", da se je zmotil. Obstajajo pa primeri, kjer lahko pride do "smiselnih nasprotij". To se lahko zgodi na primer, če odločevalec pri izbiri artikla daje prednost ceni, toda v primeru skoraj enakih cen da prednost kakovosti. Tako je za artikle:

$$a = (\text{ 150 din, odličen })$$
$$b = (\text{ 125 din, zelo dober })$$
$$c = (\text{ 100 din, dober })$$

mogoče najti razlago odločitev aPb, bPc in cPa.

Funkcija koristnosti

Določimo funkcijo u iz dokaza izreka za naš primer. Dobimo:

$$\begin{aligned}
u(\text{Rim}) &= u(\text{Pariz}) &= 5 \\
u(\text{Atene}) &= 4 \\
u(\text{Dunaj}) &= u(\text{Moskva}) &= 2 \\
u(\text{London}) &= 1 \\
u(\text{Oslo}) &= 0
\end{aligned}$$

Če sedaj preuredimo tabelo glede na urejenost alternativ, tako da so pripadajoče funkcijske vrednosti padajoče, lahko preprosto preverimo, ali je u homomorfizem – kadar je, ni med enicami v tabeli nobene ničle:

Preurejena relacija

	Rim	Pariz	Atene	Moskva	Dunaj	London	Oslo
Rim	0	0	1	1	1	1	1
Pariz	0	0	1	1	1	1	1
Atene	0	0	0	1	1	1	1
Moskva	0	0	0	0	0	1	1
Dunaj	0	0	0	0	0	1	1
London	0	0	0	0	0	0	1
Oslo	0	0	0	0	0	0	0

Koristnost

V našem primeru je potemtakem preslikava u homomorfizem. Kaj pa, če raje obiščem London kot Rim?

$$\neg(\text{London}P\text{Pariz}),\ \neg(\text{Pariz}P\text{Rim}) \ \Rightarrow\ \neg(\text{London}P\text{Rim})$$

da protislovje.

Kako natančno pa je homomorfizem določen za take sisteme? Na to vprašanje daje odgovor izrek:

IZREK 4 *Naj bo P dvomestna relacija na končni množici A in naj obstaja preslikava $u : A \to \mathbb{R}$, tako da za vsak par $a, b \in A$ velja:*

$$aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$$

potem je $\Phi = (A, P) \to \Sigma = (R, >)$ regularna predstavitev in je (Φ, Σ, u) urejenostna lestvica.

Dokaz

Vzemimo poljubno strogo naraščajočo funkcijo $\varphi : u(A) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow x > y$$

Velja: $\varphi \circ u(a) > \varphi \circ u(b) \Leftrightarrow u(a) > u(b) \Leftrightarrow aPb$. Torej je tudi $\varphi \circ u$ homomorfizem.

Pokažimo, da velja tudi obratno: če je $\varphi \circ u$ homomorfizem, je preslikava φ strogo naraščajoča. Označimo $x = u(a)$ in $y = u(b)$. Tedaj velja:

$$x = u(a) > u(b) = y \Leftrightarrow aPb \Leftrightarrow \varphi \circ u(a) > \varphi \circ u(b) \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(y)$$

S tem smo pokazali, da so dopustne transformacije natanko vse strogo naraščajoče funkcije.

Pokažimo še, da vsaka funkcija, ki zadošča pogoju iz izreka, določa regularno lestvico – torej je predstavitev regularna.

Dokaz

Naj bo v poljubna druga nadomestna lestvica: $aPb \Leftrightarrow v(a) > v(b)$. Po izreku 1 moramo pokazati

$$u(a) = u(b) \Rightarrow v(a) = v(b)$$

Iz $u(a) = u(b)$ izhaja, da mora hkrati veljati $u(a) \leq u(b)$ in $u(b) \leq u(b)$ oziroma $\neg aPb$ in $\neg bPa$. Ker je v nadomestna lestvica mora tedaj veljati $v(a) \leq v(b)$ in $v(b) \leq v(b)$ oziroma končno $v(a) = v(b)$.

Težave z opisanim pristopom nastopijo že, ko je število alternativ preveliko, da bi izpolnili celotno tabelo. Za take primere je v Roberts (1976), str.508-509 opisan verjetnostni postopek, kako, ob predpostavki, da obstaja, določimo urejenostno funkcijo koristnosti.

Števni primer

V primeru, ko je množica A števna, je predstavitveni izrek pokazal že Cantor (1895).

IZREK 5 *Naj bo A števna množica in $P \subseteq A \times A$. Tedaj obstaja preslikava $u : A \to \mathbb{R}$, za katero velja*

$$aPb \Leftrightarrow u(a) > u(b)$$

natanko takrat, ko je P stroga šibka urejenost. Tedaj je $\Phi = (A, P) \to \Sigma = (\mathbb{R}, >)$ regularna predstavitev in (Φ, Σ, f) urejenostna lestvica.

Dokaz: Dokaz je skoraj enak dokazu za primer, ko je množica A končna. Razlikujeta se le v definiciji primerka funkcije u.

Ker je množica A števna, lahko njene elemente oštevilčimo

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$$

Postavimo

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i P a_j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

in

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_{ij}}{2^j}$$

Ta vrsta je konvergentna. Naj bo $a = a_r$, $b = a_s$ in aPb. Tedaj je $P(b) \subset P(a)$ in zato

$$u(a) = u(a_r) \geq u(a_s) + \frac{1}{2^s} > u(a_s) = u(b)$$

□

Če množica A ni števna, predstavitev ne obstaja vedno. To spreVidimo iz naslednjega protiprimera.

Naj bo $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in P *leksikografska urejenost ravnine*

$$(a, b)P(c, d) \equiv (a > c) \vee (a = c \wedge b > d)$$

P je stroga šibka (celo stroga linearna) urejenost.

Recimo, da bi obstajal homomorfizem $u : A \to \mathbb{R}$. Tedaj za vsak $a \in \mathbb{R}$ iz $(a,1)P(a,0)$ izhaja $u(a,1) > u(a,0)$. Ker med različnima realnima številoma vselej obstaja racionalno število, obstaja $g(a) \in \mathbb{Q}$, tako da je $u(a,1) > g(a) > u(a,0)$. Vzemimo $b < a$. Tedaj je $g(a) > u(a,0) > u(b,1) > g(b)$. Torej obstaja injektivna preslikava $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, kar ni res.

Do sedaj smo obravnavali le osnovna merjenja. Kadar pa imamo opraviti z več parametri, po katerih odločamo, gre za "združena" merjenja, ki jih lahko obravnavamo kot poseben primer izpeljanih merjenj. Upoštevati moramo več lastnosti variant. Večina prizadevanj in rezultatov je usmerjenih na vprašanje, kdaj je v teh primerih funkcija koristnosti aditivna, tj. izrazljiva kot vsota funkcij koristnosti odvisnih samo od posameznih lastnosti (Chankong, Haimes 1983).

Izpeljane lestvice

Naj bodo $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ osnovna merjenja na A in g *izpeljano merjenje* določeno z zvezo/pogoji

$$C(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, g)$$

Na primer, pri definiciji gostote ρ z maso m in prostornino V je

$$C(m, V, \rho) \equiv \rho = \frac{m}{V}$$

Predstavitveni izrek za izpeljano lestvico izhaja iz predstavitvenih izrekov za osnovne lestvice, ki nastopajo v njeni definiciji. Zanimivejši je problem enoličnosti.

Dopustne transformacije za izpeljane lestvice

Pri tem nastopita dve možnosti: če se sprašujemo po dopustnih transformacijah $\varphi : g(A) \to \mathbb{R}$, tako da določa lestvico tudi

- $C(f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \varphi \circ g)$, govorimo o dopustnih transformacijah v *ozkem smislu*;
- $C(f'_1, f'_2, f'_3, \ldots, f'_n, \varphi \circ g)$, pri čemer so $f'_1, f'_2, f'_3, \ldots, f'_n$ nadomestne lestvice, govorimo o dopustnih transformacijah v *širokem smislu*.

Zato imamo tudi dve vrsti regularnosti in tipa – v ozkem in širokem smislu.

...Dopustne transformacije za izpeljane lestvice

Tako je gostota ρ absolutna lestvica v ozkem smislu. V širokem smislu pa: Masa m in prostornina V sta razmernostni lestvici. Zato je

$$\rho' = \frac{m'}{V'} = \frac{\alpha m}{\beta V} = \frac{\alpha}{\beta}\rho = \gamma\rho, \qquad \alpha, \beta > 0 \Rightarrow \gamma > 0$$

tudi razmernostna lestvica.

Izpeljano lestvico lahko obravnavamo tudi kot osnovno lestvico. V tem primeru ima definicijska zveza, ki jo določa, vlogo zakona, ki veže osnovne lestvice.

Psihofizični zakoni

Pogosto v psihofizičnih meritvah poskušamo izraziti zvezo med *psihično* (izpeljano) lestvico p (npr. glasnost) in ustrezno fizikalno lestvico f (npr. jakost zvoka) s funkcijsko zvezo

$$p(a) = \psi(f(a))$$

Funkciji ψ pravimo *psihofizična funkcija*.

Naj bo v opazovanem psihičnem sistemu podana relacija

$aPb \equiv a$ je opazno močnejši glede na opazovani občutek kot b

Naj bo p ustrezna lestvica. Tedaj obstaja za vsak $a \in A$ vrednost – prag $\Delta_p(a) > 0$, ko postane sprememba v občutenju zaznavna. Relacija P zadošča pogoju

$$aPb \Leftrightarrow p(a) > p(b) + \Delta_p(b)$$

Webrov in Fechnerjev zakon

Leta 1834 je E.H. Weber postavil predpostavko – *Weberov zakon*

$$\frac{\Delta_p(a)}{p(a)} = \frac{\Delta_p(b)}{p(b)}$$

Iz tega zakona je leta 1850 G. Fechner pokazal, da ima ψ logaritemsko obliko

$$\psi(x) = \alpha \log x + \beta$$

Vendar se je v praksi pokazalo, da Fechnerjev zakon pogosto ne velja. To sta na primer leta 1933 z obsežnimi merjenji glasnosti pokazala Fletcher in Munson. Stevens je leta 1957 začel zagovarjati mnenje, da velja *potenčni zakon*

$$\psi(x) = \alpha x^\beta, \quad \alpha > 0$$

To obliko je že leta 1872 predlagal Plateau.

Potenčni zakon

Poskusi v naslednjih letih so pokazali, da potenčni zakon dobro opisuje celo vrsto občutkov

p	β	pogoji
glasnost	0.3	dve ušesi
glasnost	0.27	eno uho
svetlost	0.5	točkovni vir, na temno prilagojeno oko
vonj	0.55	kava
okus	0.8	saharin
okus	1.3	sol
temperatura	1.0	mraz na roki
trajanje	1.1	beli šum
teža	1.45	dvigovanje uteži
električni šok	3.5	na prstih
teža prekrška	0.17	kraja denarja

Luceov izrek

IZREK 6 *(Luce 1959) Naj bo funkcija ψ zvezna in naj lestvici p in f zadoščata pogojem iz tabele, potem mora funkcija ψ zadoščati funkcijski enačbi in ima rešitev oblike, kakor je podano v nadaljevanju tabele.*

f	p	*enačba*	ψ
$f : A \to \mathbb{R}^+$ *razmernostna*	$p : A \to \mathbb{R}^+$ *razmernostna*	$\psi(kx) = K(k)\psi(x)$ $k > 0,\ K(k) > 0$	$\psi(x) = \alpha x^\beta$
$f : A \to \mathbb{R}^+$ *razmernostna*	$p : A \to \mathbb{R}$ *razmična*	$\psi(kx) = K(k)\psi(x) + C(k)$ $k > 0,\ K(k) > 0$	$\psi(x) = \alpha \ln x + \beta$ *ali* $\psi(x) = \alpha x^\beta$
$f : A \to \mathbb{R}$ *razmična*	$p : A \to \mathbb{R}^+$ *razmernostna*	$\psi(kx + c) = K(k, c)\psi(x)$ $k > 0,\ K(k, c) > 0$	$\psi(x) =$*const*
$f : A \to \mathbb{R}$ *razmična*	$p : A \to \mathbb{R}$ *razmična*	$\psi(kx + c) =$ $K(k, c)\psi(x) + C(k, c)$ $k > 0,\ K(k, c) > 0$	$\psi(x) = \alpha x + \beta$

Pri tem so vse lestvice p vzete v širokem smislu.

Dokaz Luceovega izreka

Dokazali bomo le veljavnost prve vrstice v tabeli. Ostale uženemo podobno.

Ker sta lestvici f in p obe razmernostni, ustreza dopustni transformaciji (množenje s pozitivno konstanto $k > 0$) prve lestvice $f' = kf$ dopustna transformacija druge lestvice $p' = K(k)p,\ K(k) > 0$. Torej iz

$$C(f, p) \equiv p = \psi \circ f \qquad \text{in} \qquad C(f', p') \equiv p' = \psi \circ f'$$

za vsak $a \in A$ izhaja

$$p(a) = \psi(f(a)) \qquad \text{in} \qquad p'(a) = \psi(f'(a))$$

kar da združeno

$$K(k)\psi(f(a)) = \psi(kf(a))$$

Ker je $f : A \to \mathbb{R}^+$ surjektivna, velja za vsak $x \in \mathbb{R}^+$

$$K(k)\psi(x) = \psi(kx)$$

Rešimo to funkcijsko enačbo. Za $x = 1$ dobimo

$$\psi(k) = K(k)\psi(1), \qquad k > 0$$

...Dokaz Luceovega izreka

Ker je $\mathcal{R}\psi \subseteq \mathbb{R}^+$, je $\psi(1) > 0$ in zato

$$\psi(kx) = \frac{\psi(k)}{\psi(1)}\psi(x) > 0$$

Postavimo

$$\gamma(x) = \ln \frac{\psi(x)}{\psi(1)}$$

pa dobimo iz

$$\frac{\psi(kx)}{\psi(1)} = \frac{\psi(k)}{\psi(1)}\frac{\psi(x)}{\psi(1)}$$

novo enačbo

$$\gamma(kx) = \gamma(k) + \gamma(x)$$

Ker je ψ zvezna, je zvezna funkcija tudi γ.

. . . Dokaz Luceovega izreka

To je ena izmed Cauchyevih funkcijskih enačb (glej Aczél 1966), za katero velja

> Naj zvezna funkcija $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ zadošča enačbi
>
> $$\gamma(xy) = \gamma(x) + \gamma(y)$$
>
> tedaj ima obliko $\gamma(x) = c \ln x,\ c \in \mathbb{R}$.

Torej je tudi v našem primeru

$$\gamma(x) = \beta \ln x$$

in dalje

$$\psi(x) = \alpha e^{\gamma(x)} = \alpha x^\beta$$

pri čemer je $\alpha = \psi(1) > 0$.

Posledice Luceovega izreka

Luce je obdelal še več drugih primerov. Tako: če je f razmernostna in p log-razmična sta edini zvezni rešitvi oblike $\psi(x) = \gamma e^{\alpha x^\beta}$ in $\psi(x) = \alpha x^\beta$; in če je f razmična in p log-razmična ima rešitev obliko $\psi(x) = \alpha e^{\beta x}$.

Luceov izrek ne velja samo za psihofizična merjenja, temveč širše. Potenčno obliko ima večina fizikalnih zakonov in zvez med geometrijskimi količinami. Na primer:

Newtonov zakon	$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$
prostornina krogle	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$