Zbirka (večinoma) rešenih nalog iz optimizacijskih metod

Druga (popravljena) poskusna izdaja,

namenjena izključno kot pomoč študentom 4. letnika FRI
pri predmetu *operacijske raziskave*
v študijskem letu 1996/97

Naklada: 40 izvodov

Avtorja[1]:
Vladimir Batagelj, prof. dr. mat.
Matjaž Kaufman, mag. rač. dipl. ing. mat.

[1]Zbirka je še nastajanju in tudi ni recenzirana.
Avtorja ne jamčita za pravilnost rešitev in ne odgovarjata za morebitno moralno ali materialno škodo, ki bi nastala ob njihovi uporabi.

1. Naloge

1.1 Postavitev optimizacijske naloge

1.1 Napisali bi radi program, ki shrani vse datoteke z diska (osebnega) računalnika na diskete enake velikosti m zlogov (bytov). Dan je seznam vseh datotek s podatki o njihovi dolžini (v zlogih). Nobena datoteka ni prevelika (daljša od m zlogov). Želimo, da program shrani datoteke čimbolj varčno - porabi kar se da malo disket.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Kako bi poskusil nalogo rešiti?

1.2 Iz pravokotne plošče $a \times b$ izreži čimveč krogov polmera r.

Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

1.3 Imamo $2n$ jabolk. Za vsako jabolko $j \in 1..2n$ poznamo njegovo težo t_j. Razdeliti jih moramo v dve košari, po n v vsako, tako da bosta vsebini obeh košar kar se da podobni (imata skoraj enako skupno težo).

Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

1.4 Imamo n stvari z znanimi težami $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Razdeliti jih želimo na dva kupa kar se da enake teže.

a) zapiši kot optimizacijsko nalogo;

b) kako bi jo reševal?

c) kaj znaš povedati o nalogi, če so $a_i = i$? Določi čim boljšo rešitev v tem primeru za $n = 9$.

1.5 Dana je množica n realnih števil E (teže, višine, ...). Določiti moramo $k < |E|$ čim krajših intervalov tako, da vsebujejo vse elemente množice E.

a) Sestavi ustrezno optimizacijsko nalogo.

b) Kako bi jo rešil (točno, z lokalno optimizacijo)?

1.6 Znesek 1988 donarjev bi radi izplačali s kovanci za 1, 2, 5, 10, 20 in 50 donarjev, tako da bi uporabili kar se da enako število kovancev posameznih vrednosti. Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Ali lahko kaj poveš o njenih rešitvah? Kako bi jo reševal?

1.7 Zaporedje n števil $a_1, a_2, ..., a_n$ bi radi razporedili v krog tako, da bo vsota absolutnih vrednosti razlik sosednjih števil čim manjša.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Poišči rešitev za zaporedje 1,2,3,4,5,6.

c) Kako bi reševal(a) nalogo pri velikem n?

1.8 Zaporedje n števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bi radi razporedili v krog, tako da bo vsota kvadratov razlik vrednosti sosednjih števil čim manjša.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo;

b) Poišči čim boljšo rešitev za zaporedje 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

c) Kako bi nalogo reševal z računalnikom?

1.9 Po pravokotni mreži $m \times n$ določi najdaljši sprehod, ki gre po posamezni povezavi največ enkrat.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Poišči čim boljšo rešitev za mrežo 5×5.

c) Kaj bi znal(a) povedati o lastnostih in reševanju naloge?

1.10 Dana je množica n točk v ravnini $\mathcal{T} = \{(x_i, y_i) : i = 1 \ldots n\}$. Enostavni graf $G = (V, E)$, $p = |V| \leq n$ bi radi narisali tako, da bi za točke grafa izbrali točke iz množice $\mathcal{T}$, povezave pa bi predstavili z daljicami med njimi. Pri tem želimo, da bi bila skupna dolžina vseh povezav-daljic čim manjša.

Zapiši kot optimizacijsko nalogo! Kako bi jo reševal(a)?

1.11 Na danem stroju lahko opravimo vsako izmed n opravil. Za i-to opravilo, $i = 1, \ldots, n$, vemo:

- obdelava na stroju poteka nepretrgano p_i ur;
- za obdelavo je dostopno od trenutka a_i dalje;
- obdelava mora biti končana do trenutka b_i, $(b_i \geq a_i + p_i)$.

Koliko najmanj takih strojev potrebujemo, če želimo pravočasno opraviti vsa opravila? Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Kako bi jo reševal(a)?

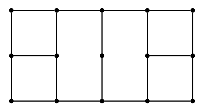
1.12 Dano je naravno število n. Na šahovnico 8×8 postavi n trdnjav, tako da do vsakega polja lahko z neko trdnjavo pridemo čim hitreje (čez čim manj polj).

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo! Kako bi jo reševal?

b) Poišči čim boljšo rešitev za $n = 5$.

c) Kaj znaš povedati o lastnostih naloge?

1.13 V mestu so ulice zelo ozke. Zato so se mestni očetje odločili, da bodo vse ulice proglasili za enosmerne; vendar tako, da bo še vedno mogoče priti iz vsakega križišča v vsako drugo križišče in, da bo razdalja med najoddaljenejšima (glede na najkrajši možni prevoz) čim manjša.



Slika 1: Omrežje ulic **1.13**

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Kako bi jo reševal?

c) Poišči čim boljšo rešitev za omrežje na sliki 1.

1.14 Andrej, Bojan in Ciril morajo priti v 30 km oddaljeni kraj. Če pešačijo, naredijo po 5 km na uro. Na voljo imajo tudi kolo, s katerim lahko uporabnik naredi 20 km na uro. Na kolesu je lahko naenkrat samo en človek. Kako naj organizirajo prevoz, tako da bodo vsi trije čimprej na cilju?

Zapiši kot optimizacijsko nalogo in določi čim boljšo rešitev!

1.15 *(speed-disk)* Dano je zaporedje

$$\alpha = a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$$

pri čemer so členi a_i naravna števila med 0 in k. Vsaj en člen je enak 0. Zaporedje spreminjamo tako, da premenjamo nek neničelni člen in nek ničelni člen. :

$$\alpha_1, a, \alpha_2, 0, \alpha_3 \longleftrightarrow \alpha_1, 0, \alpha_2, a, \alpha_3$$

S čim manj premenami želimo zaporedje α pretvoriti v zaporedje s padajoče urejenimi členi.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Kaj znaš o njej povedati (rešljivost, ocene zahtevnosti, ...)?

b) Poišči čim boljšo rešitev za primer

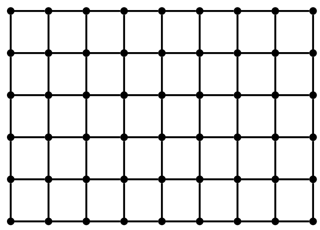
$$\alpha = 3, 1, 5, 0, 5, 4, 0, 3, 5, 2$$

c) Sestavi postopek za reševanje naloge.

1.16 V ravnini imamo danih $2n$ točk. Za vsako točko i poznamo njeni koordinati (x_i, y_i). Vsako točko želimo povezati s po tremi drugimi točkami, tako da bo vsota razdalj med povezanimi pari točk najmanjša.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Sestavi postopek lokalne optimizacije za njeno reševanje.



Slika 2: Omrežje ulic **1.17**

1.17 V ameriškem mestu imajo pravokotno mrežo ulic sestavljeno iz n vodoravnih in m navpičnih ulic (glej sliko 2). Na križišča želimo postaviti k servisov (na sliki 2 smo postavili $k = 4$ servise), tako da bo razdalja po cesti med poljubnim križiščem in nekim servisom čim krajša.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Poišči optimalno rešitev za mrežo ulic 6×9 in $k = 5$. Odgovor utemelji!

c) Kako bi v splošnem reševal nalogo?

1.18 V obratu, ki ga nameravamo zgraditi, bo n strojev $S_1, S_2, ..., S_n$. Ocene tokov materiala med posameznima stojema je podana v matriki $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Število a_{ij} je torej pričakovani tok materiala s stroja S_i do stroja S_j.
Za namestitev strojev imamo na voljo m mest, $m \geq n$. Mesto T_k je določeno s koordinatama (x_k, y_k). Na posamezno mesto lahko postavimo največ en stroj.
Stroje želimo razmestiti tako, da bodo pričakovani transportni stroški čim manjši. Strošek transporta od stroja S_i do stroja S_j je enak produktu toka a_{ij} in razdalje med mestoma, na katerih stojita.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Kako bi jo reševal?

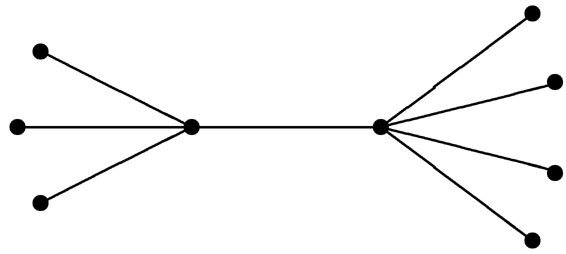
1.19 Dan je neusmerjen graf $G = (V, E)$. *Številsko barvanje* grafa G imenujemo preslikavo $b : V \to \mathbb{N}^+$, za katero velja

$$(u : v) \in E \Rightarrow b(u) \neq b(v)$$

Vrednost barvanja b imenujemo vsoto barv posameznih točk. Določi številsko barvanje z najmanjšo vrednostjo.

a) Zapiši nalogo številskega barvanja kot optimizacijsko nalogo;

b) Določi minimalno številsko barvanje za graf na sliki:



c) Kako bi sestavil program za reševanje naloge številskega barvanja?

1.20 V odboru je n poslancev. Vemo, kateri pari poslancev so med sabo paroma skregani. Na seji jih želimo posaditi za okroglo mizo tako, da bo čimmanj skreganih poslancev sosedov (sedelo eden poleg drugega).

a) Sestavi ustrezno optimizacijsko nalogo $(\Phi, P, \in \text{Min})$.

b) Predlagaj postopek za rešitev te naloge.

1.21 Dana je množica Q, ki jo sestavlja n kvadratov s stranicami dolžin $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Kvadrate želimo zložiti v čim manjši kvadrat, tako da se med seboj ne prekrivajo in so njihove stranice vzporedne stranici kvadrata.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Podaj zamisel postopka za reševanje.

b) Poišči čim boljšo rešitev za množico

$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

1.22 Na šahovnici prikazani na sliki

želimo v čim manj potezah zamenjati položaje črnih in belih konjev.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Reši nalogo.

c) Kako bi reševal (-a) nalogo na šahovnici $m \times n$ s po m belimi in črnimi konji postavljenimi ob nasprotnih stranicah šahovnice, podobno kot na sliki za $m = 3$ in $n = 4$?

1.23 Na šahovnico $n \times n$ želimo postaviti k šahovskih konjičkov tako, da do vsakega polja šahovnice pridemo z nekim od konjičkov v čim manj skokih.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Poišči vsaj eno optimalno rešitev za $n = 8$ in $k = 2$. Ne pozabi pokazati, da je res optimalna.

1.24 Funkciji f in g iz A v $\mathbb{R}$ sta *urejenostno podobni*, $f \asymp q$, če velja

$$\forall x, y \in A : \text{sign}(f(x) - f(y)) = \text{sign}(g(x) - g(y))$$

Nalogi $\pi_1 = (\Phi, P, \text{Min})$ in $\pi_2 = (\Psi, Q, \text{Min})$ sta *urejenostno enakovredni*, če obstajata taki preslikavi $\tau : \Phi \to \Psi$ in $\sigma : \Psi \to \Phi$, da velja

$$P \asymp Q \circ \tau, \quad Q \asymp P \circ \sigma \quad \text{in} \quad P \circ \sigma \circ \tau = P$$

Pokaži:

a) Naj bosta $P, Q : \Phi \to \mathbb{R}$. Tedaj velja

$$P \asymp Q \;\Rightarrow\; \text{Min}(\Phi, P) = \text{Min}(\Phi, Q)$$

b) Naj bosta nalogi π_1 in π_2 urejenostno enakovredni. Tedaj velja:

$$x^* \in \text{Min}(\Phi, P) \;\Rightarrow\; \tau(x^*) \in \text{Min}(\Psi, Q)$$

1.2 Konveksnost

2.1 Bodita Φ in Ψ konveksni množici v $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da je tedaj konveksna tudi množica

$$\Phi + \Psi \;=\; \{\, t \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists x \in \Phi\, \exists v \in \Psi : t = x + v \,\}$$

2.2 Naj bo $\Phi,\ \Psi \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj definiramo

$$\lambda\Phi \;=\; \{\, \lambda x \mid x \in \Phi \,\} \quad \text{in} \quad \Phi + \Psi \;=\; \{\, x + y \mid x \in \Phi,\ y \in \Psi \,\}$$

Pokaži: $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna natanko takrat, ko velja:

$$\forall \lambda, \mu \geq 0 \;:\; (\; \lambda\Gamma + \mu\Gamma \;=\; (\lambda + \mu)\Gamma \;)$$

2.3 Za vsako izmed naslednjih funkcij definiranih na $\mathbb{R}^2$ določi, ali je konveksna:

a) $f(x,y) \;=\; x^4 + xy + y^2$

b) $g(x,y) \;=\; \max\{\, |x|,\ |y| \,\}$

c) $h(x,y) \;=\; e^{xy}$

2.4 Ali je funkcija $P(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz$ (strogo) konveksna na $\mathbb{R}^3$? Odgovor utemelji!

2.5 Ali je funkcija $f(x,y) \;=\; x^2 + 3y^2 + xy - 10x$ konveksna na $\mathbb{R}^2$? Odgovor utemelji!

2.6 Ali je funkcija

$$f(x,y,z) \;=\; xy + 2x^2 + y^2 + 2z^2 - 6xz$$

konveksna/konkavna na $\mathbb{R}^3$? Odgovor utemelji!

2.7 Ali je funkcija

$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

konveksna na $\mathbb{R}^2$?

2.8 Ugotovi (strogo) konveksnost/konkavnost funkcije

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y,z) = x + y + 3z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2.9 Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Ali je funkcija

$$f(x,y) \;=\; \left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{b - y} \right)^{-1}$$

konveksna na območju $A \;=\; \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x > a,\ y > b \,\}$?

2.10 Ali je funkcija

$$f(x,y) \;=\; x^2 - 4xy + 5y^2 - \ln(xy)$$

(strogo) konveksna na množici

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \}$$

Namig: zapiši f kot vsoto dveh funkcij.

2.11 Ali je funkcija

$$F(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$$

(strogo) konveksna na vsem $\mathbb{R}^3$?

2.12 Ali je funkcija

$$P(x,y) = ax + \frac{b}{x} + cy + \frac{d}{y}, \qquad a,b,c,d > 0$$

konveksna na množici $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$?

2.13 Naj bo $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija.
Pokaži, da je:

a) $\Phi = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \, ; \, Q(\boldsymbol{x}) > 0 \}$ konveksna množica in

b) $P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Q(\boldsymbol{x})}$ konveksna funkcija na Φ.

2.14 Naj bo funkcija $P(x)$ konveksna na konveksni množici Φ in naj velja $\forall x \in \Phi : P(x) > 0$.
Ali je resnična trditev, da je tedaj funkcija

$$Q(x) = \frac{1}{P(x)}$$

konkavna? Odgovor utemelji!

2.15 Pokaži, da nekonstantna konveksna funkcija na omejeni konveksni množici Φ ne more doseči (globalnega) maksimuma v notranji točki množice Φ.
Upoštevaj naslednjo lemo: če je x notranja točka množice Φ, velja

$$\forall y \in \Phi \; : \; x \neq y \Longrightarrow (\exists \delta > 0 \; \forall \lambda \in [1-\delta, 1+\delta] : \; (1-\lambda)y + \lambda x \in \Phi)$$

2.16 Naj bosta f_1 in f_2 konveksni funkciji na $\mathbb{R}^n$. Naj bo

$$f_1 \diamond f_2 = \inf\{ f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ in } x = x_1 + x_2 \}$$

Pokaži, da je $f_1 \diamond f_2$ konveksna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

2.17 Za katere vrednosti parametra a je funkcija

$$P(x,y) = x^2 + 3y^2 + axy$$

konveksna na $\mathbb{R}^2$?

2.18 Za katere vrednosti realnih parametrov a, b in c je funkcija

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

konveksna na $\mathbb{R}^2$? (Zapiši potreben in zadosten pogoj!) Odgovor utemelji.

2.19 Za katere vrednosti realnih parametrov a in b je funkcija $P(x,y) = x^a y^b$ konveksna na $(\mathbb{R}^+)^2$?

2.20 Za katere pozitivne vrednosti parametrov a, b, c je funkcija $f(x,y,z) = x^a + y^b + z^c$ konveksna na $(\mathbb{R}^+)^3$?

2.21 Določi območje konveksnosti funkcije

$$P(x,y,z) = x^3 + y^2 + z; \;\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

2.22 Ali je množica $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x^2, \; x+y+z \leq 6 \}$ konveksna?

2.23 Pokaži, da je množica $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \; x^2 + y^2 \leq 16, \; e^x \leq y \}$ konveksna.

2.24 Pokaži, da je funkcija $f(\underline{x}) = \sqrt{1 - \|\underline{x}\|^2}$ za $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\underline{x}\| < 1$ konkavna. Pri tem je $\|\underline{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Upoštevaj, da velja trditev:

Če je $f : \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna in je $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna in nepadajoča, ter je $f(\Phi) \subseteq \Gamma \subseteq \mathbb{R}$, tedaj je $g \circ f$ konveksna.

2.25 Naj bo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$$

kjer $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ in $c \in \mathbb{R}$. Pokaži, da je f konveksna natanko takrat, ko je $(\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A})$ pozitivno semidefinitna matrika.

2.26 Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima lastnost (**homogenost**)

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}^n \text{ in za vsak } \lambda \geq 0$$

Pokaži, da je funkcija f konveksna na $\mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko zadošča pogoju (**subaditivnost**)

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \text{ za poljubna } x, y \in \mathbb{R}^n$$

2.27 Pokaži, da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna na $\mathbb{R}^n$ natanko takrat, ko je za vsak $x, y \in \mathbb{R}^n$ funkcija $F(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ konveksna na $[0,1]$.

2.28 Ali je funkcija

$$f(x,y) = 10 - 2(y - x^2)^2$$

konkavna na

a) konveksni množici

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \; -1 \leq y \leq 1 \}$$

b) konveksnih podmnožicah množice

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \geq y \}$$

Odgovora utemelji!

1.3 Prirejene in dualne naloge

3.1 Naj bo $\Phi = \Psi = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ in $G : \Phi \times \Psi \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $G(x, y) = \sin(x(x + y))$.

a) Določi glede na G prirejeni nalogi (Φ, P, Min) in (Ψ, Q, Max).

b) Ali sta nalogi dualni?

c) Kaj pa glede na G prirejeni nalogi (Φ, P_1, Max) in (Ψ, Q_1, Min)

3.2 Naj bo $\Phi = \Psi = [0, 1]$. Na množici $\Phi \times \Psi$ je dana funkcija $G(x, y) = 3x^2 - 5x + 6xy - 2y^2 + 1$.

a) Določi glede na G prirejeni nalogi (Φ, P, Min) in (Ψ, Q, Max).

b) Ali sta nalogi dualni?

3.3 Dana je naloga $\Pi = (\Phi, P, \text{Min})$, kjer je

$$\Phi = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 3x,\ 2x + y \leq 1 \}$$

$$\text{in} \quad P(x, y) = \frac{1}{x + y + 3}$$

a) Ali je enakovredna nalogi $(\Phi, \frac{1}{P}, \text{Max})$?

b) Določi nalogo, ki je po Lagrangeu prirejena nalogi Π.

3.4 Določi (po Lagrangeu) prirejeno nalogo nalogi (Φ, P, Min), kjer je

$$P(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2$$
$$\Phi = \{(x, y) \in R^2 : 3x + y \geq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

Ali je dualna?

3.5 Za optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} P(x, y) &= |x - 1| + |y - 2| + |z - 3| \\ \Phi &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1 \} \end{aligned}$$

določi po Lagrangeu prirejeno nalogo.

1.4 Nelinearne zvezne optimizacijske naloge

4.1 Poišči minimume in maksimume funkcije

$$F \ : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x,y,z) \ = \ (2x-y)^2 \ + \ (2y-3z)^2 \ + \ (2z-1)^2$$

4.2 Reši optimizacijsko nalogo $(\mathbb{R}^2, P, \mathrm{Min})$, kjer je

$$P(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$$

4.3 Določi vse maxime in minime funkcije $P(x,y,z) = xz + y^2$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

4.4 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), za katero je:

$$\Phi = \{ \ (x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x + y \geq 0, \ y^2 \leq x \ \}$$

in

$$P(x,y) = y$$

4.5 Poišči globalne maksimume in minimume funkcije

$$g(x,y,z) \ = \ x + y + z$$

na območju

$$\Phi \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \ \}$$

4.6 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), kjer je

$P(x,y,z) = 2x - y$
$\Phi = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ x \leq z, \ x + z + 1 \leq 0\}$

4.7 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x + 2y \\ \Phi &= \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \ x + y \leq 4, \ x \leq 4 \ \} \end{aligned}$$

4.8 Reši nalogo (Φ, P, Min)

$$\begin{aligned} P(x,y) &= -x - y \\ \Phi &= \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x^2 + y^2 - 1 \leq 0, \ x \geq y^2 \ \} \end{aligned}$$

4.9 Reši nalogo (Φ, P, Min)

$$P(x,y,z) \ = \ x + y + z$$

$$\begin{aligned} \Phi \ = \ \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x^2 + y^2 &\leq \ 2, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 &\leq \ 2, \\ z^2 &\leq \ 2z \ \} \end{aligned}$$

4.10 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min)

$$\Phi \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; xy \geq 1,\ x \geq 1,\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{5}{4}\ \}$$

$$P(x,y) \;=\; 3x \;+\; 4y$$

4.11 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, max), kjer je
$\Phi \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; x^2 + y \;\leq\; 1$ in $(x-1)^2 + y^2 \;\leq\; 0\ \}$ in je
$\mathrm{P}(x,y) \;=\; y - x$

4.12 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, min), kjer je

$$\Phi \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x \;+\; y \;\leq\; 8,\ x \;\geq\; 1,\ y \;\geq\; 1\ \}$$

$$P(x,y) \;=\; \frac{1}{x} \;+\; \frac{1}{y}$$

4.13 Reši nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ; \qquad \begin{array}{rcl} 1 & \leq & xy \\ 1 & \leq & x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 & \leq & 1\ \} \end{array} \\ P(x,y) & = & 3x \;+\; 4y \end{array}$$

4.14 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max) , kjer je

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 4,\ x + y \leq 3\}$$

$$P(x,y) = y - 2x$$

4.15 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ : \quad \begin{array}{rcl} x^2 \;+\; y^2 & \leq & 1 \\ y^2 & \leq & x \\ x \;+\; y & \geq & 0\ \} \end{array} \\ P(x,y) & = & 2y \;-\; 3x \;+\; 4 \end{array}$$

4.16 Reši nalogi (Φ, P, Min) in (Φ, P, Max) , kjer je

$$\Phi \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 16,\ x^2 + y^2 \geq 13\ \}$$

$$\text{in} \quad P(x,y) \;=\; x$$

4.17 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), za katero je:

$$\Phi = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x + y \leq 5,\ 2x - y \leq 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \}$$

in

$$P(x,y) = 4x + y - x^2$$

4.18 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), za katero je:

$$\Phi = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x + 3y \le 6,\ x + 4y \le 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \}$$

in

$$P(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10$$

4.19 Reši naslednjo optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min)

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \le 2,\ 2x - y \le 2\ \} \end{aligned}$$

4.20 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min) , kjer je

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 1, x + y \le 2, x, y \ge 0\}$$

$$P(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

4.21 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min) , kjer je

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 2y \le 10, 5x + 3y \le 41, 2x - 3y \le 8, x, y \ge 0\}$$

$$P(x,y) = 2x^2 + y^4$$

4.22 Reši nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad x + y &\le 10, \\ -x + 2y &\le 5, \\ x + 4y &\ge 13, \\ x, y &\ge 0 \quad \} \end{aligned}$$

$$P(x,y) = x - x^2 - 4y$$

4.23 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$P(x,y) = x^2 - y^2 + y$$

$$\Phi = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x + y \le 2,\ x, y \ge 0\ \}$$

4.24 Reši nalogi (Φ, P, Min) in (Φ, P, Max) , kjer je

$$\Phi = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 8\ \}$$

$$P(x,y) = x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$$

4.25 Reši naslednjo optimizacijsko nalogo $\Pi = (\Phi, P, \mathrm{Max})$

$P(x,y) = 8x^2 + 2y^2$
$\Phi = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9, x \le 2, x \ge 1, y \ge 1\}$

4.26 Reši naslednjo optimizacijsko nalogo $\Pi = (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$P(x,y) = x^2 + (y-1)^2$$
$$\Phi = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2, x \geq 2y\}$$

4.27 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), za katero je:

$$\Phi = \{\ (x,y) \in R^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 5,\ x + 2y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \}$$

in

$$P(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

4.28 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= xyz \\ \Phi &= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ \} \end{aligned}$$

4.29 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min) , kjer je

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0,\ x^2 \leq 4\}$$

$$P(x,y) = 3 + (x-6)^2 + (y-1)^2$$

4.30 Reši nalogo $(\Psi, Q, \max)$, kjer je

$$\Psi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & +y & +z & \leq 4 \\ x^2 & -y & & \leq 3 \end{pmatrix},\ x,y,z \geq 0\right\}$$

$$\mathrm{Q}(x,y,z) = x^2 - 5x + y^2 - 5y - z.$$

4.31 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, min), kjer je

$$\Phi\ =\ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 4xy + y^2 = 1,\ y + z = 6\ \}$$

in $P(x,y,z)\ =\ (x+2)^2 + 2(y-1) + z^2$

4.32 Reši nalogo $\pi = (\Phi, P, \mathrm{Min})$, kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y^2 \leq 2x + 1, \\ &\quad\ x \leq y + 1,\ 0 \leq x\} \\ P(x,y) &= 4y(y-1) + x(x-2) \end{aligned}$$

4.33 Reši nalogo (Φ, P, Max), kjer je

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{rl} 2y - x \leq & 2, \\ x^2 - (y-1)^2 \leq & 5, \\ x,y \geq & 0 \end{array} \}$$

$$P(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

4.34 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), za katero je:

$$\Phi = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x+y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \}$$

in

$$P(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + x + y$$

4.35 Naj bodo x, y, z nenegativna realna števila, za katera velja $x+y+z=1$. Pokaži, da je tedaj

$$0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$$

4.36 Z uporabo geometričnega programiranja reši nalogo (Φ, P, Min)

$$\begin{aligned} P(x,y) &= Ax + Bx^{-2}y^3 + Cy^{-4} \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\ \} \end{aligned}$$

4.37 Reši nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0\ ,\ e^x + e^y \le 20\ \} \\ P(x,y) &= e^{-(x+y)} \end{aligned}$$

4.38 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), kjer je

$$\Phi = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ \begin{aligned}[t] & y+z = 8; \\ & x+y+w = 10; \\ & x,y,z,w \ge 0\} \end{aligned}$$

in

$$P(x,y,z,w) = 2x^2 + 2y^2 + xy + 10x + 20y\ .$$

4.39 Reši optimizacijsko nalogo $((\mathbb{R}^+)^2, P, \mathrm{Min})$, kjer je

$$P(x,y) = 4x + \frac{x}{y^2} + 4\frac{y}{x}$$

4.40 Poišči globalne ekstreme funkcije $P(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ na območju

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \le 4,\ |x-y| \le 4\}$$

4.41 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min) kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5y + \tfrac{2}{xy} \le 1,\ x,y > 0\ \} \\ P(x,y) &= 8x + \tfrac{814}{xy} \end{aligned}$$

4.42 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), za katero je:

$$\Phi = \{\ x \in \mathbb{R}^n\ :\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1\ \}$$

in

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - a_i \mid$$

ter so $a_i, i = 1, .., n$ dana števila.

4.43 Janez ima na voljo znesek D in lahko kupi material treh vrst po cenah α, β, γ za kilogram. Če kupi x kg prvega, y kg drugega in z kg tretjega materiala, je njegova 'koristnost' določena z izrazom:

$$u(x, y, z) = x^a y^b z^c$$

kjer so $a, b, c > 0$ dane konstante.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo.

b) Koliko posameznega materiala naj Janez kupi, da bo čim bolj zadovoljen?

4.44 Sestaviti moramo krožni pokončni valj predpisane prostornine V. Cena materiala za obe osnovni ploskvi znaša c (Kuvajtskih) dinarjev na enoto površine, medtem ko nas plašč stane d dinarjev na enoto površine. Določi najcenejši valj!

4.45 Za valjasto pločevinko smo pripravljeni plačati d donarjev. 1 cm^2 pločevine za osnovni ploskvi stane a donarjev; 1 cm^2 pločevine za plašč pa b donarjev. Določi višino h in polmer r valja, tako da bo njegova prostornina največja!

4.46 Za to, da stisnemo $1kg$ plina z začetnega tlaka p na končni tlak $q \geq p$ potrebujemo energijo $K(\sqrt{\frac{q}{p}} - 1)$. Plin želimo stisniti z začetnega tlaka $p_0 > 0$ na končni tlak $p_3 \geq p_0$ v treh stopnjah (najprej s p_0 na $p_1 \geq p_0$, nato s p_1 na $p_2 \geq p_1$ in na koncu s p_2 na $p_3 \geq p_2$).

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Ne pozabi na omejitve.

b) Pri kolikšnih vmesnih tlakih p_1 in p_2 za to porabimo najmanj energije? Odgovor utemelji.

1.5 Linearno programiranje

5.1 Poišči neenačbe, ki določajo polieder

$$K = \{ \lambda_1(5,0,10) + \lambda_2(-3,2,12) + \mu_1(0,1,-1) + \mu_2(2,-3,-3) \mid \lambda_1+\lambda_2 = 1,\ \lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2 \geq 0 \}$$

5.2 Reši naslednjo optimizacijsko nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$

$$P(x,y) = 18x + 10y$$
$$\Phi = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x+5y \leq 45, 7x+9y \leq 63, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

5.3 Določi dualno nalogo naloge LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$P(x,y) = 2x + 5y$$
$$\Phi = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+3y \geq 4, 3x+5y \geq 7, x+y \geq 3, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

5.4 Reši nalogo linearnega programiranja (Φ, P, Max), za katero je:

$$\Phi = \{ (x,y,z) \in R^3 \ :\ x+2y+3z \leq 4,\ -x-4y+10z \leq 7,\ x,y,z \geq 0 \}$$

in

$$P(x,y,z) = 2x + y + 7z$$

Računaj z ulomki!

5.5 Reši nalogo linearnega programiranja (Φ, P, Min), kjer je:

$$P(x,y,z) = 12x - 10y - 30z$$

in

$$\Phi = \{(x,y,z) \in R^3 : -3x+2y+8z \leq 17, -x+y+3z \leq 9, -2x+y+8z \leq 16, x,y,z \geq 0\}$$

5.6 Reši nalogo linearnega programiranja (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= x + 7y + 3z \\ \Phi &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+z \leq 2,\ 3x+5y+z \leq 5,\ x,y,z \geq 0 \} \end{aligned}$$

5.7 Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), za katero je:

$$\Phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 2x+y+3z \leq 10,\ 2y+z \leq 6,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \}$$

in

$$P(x,y,z) = 3x + y + z$$

Namig: dualnost

5.8 Reši naslednjo optimizacijsko nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x,y,z,w) &= 4x + 15y + 12z + 2w \\ \Phi &= \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+3z+w \geq 1, \\ &\qquad x+3y+z-w \geq 1,\ x,y,z,w \geq 0 \} \end{aligned}$$

5.9 S pomočjo dualne naloge reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 17x + 14y \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + y \geq 7,\ 3x + 4y \geq 15,\ x, y \geq 0\ \} \end{aligned}$$

5.10 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x_1, ..., x_6) &= \textstyle\sum_{i=1}^{6} x_i \\ \Phi &= \{\ (x_1, ..., x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\geq& 20, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 &\geq& 25, \\ x_4 + x_6 &\geq& 10, \\ \forall i \in 1..6 \ :\ x_i &\geq& 0\ \} \end{array} \end{aligned}$$

5.11 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= x + 2y + 3z \\ \Phi &= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rl} 3x + y + 2z \geq & 3, \\ x + 2y - z = & 2, \\ x, y, z \geq & 0\ \} \end{array} \end{aligned}$$

5.12 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2x + y \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \begin{array}{rl} 4x + y \geq & 12, \\ x + 2y \geq & 10, \\ x + y \leq & 14, \\ 12 \geq x \geq & 0, \\ y \geq & 3\ \} \end{array} \end{aligned}$$

5.13 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$, kjer je

$$\Phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z \geq 5, x - 2y + 4z \geq 8, x, y, z \geq 0\}$$

$$P(x,y,z) = -2x - z$$

5.14 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= x + y + z \\ \Phi &= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \begin{array}{rl} x + y = & 2, \\ y + z \geq & 1, \\ x + z \leq & 5, \\ x, y, z \geq & 0\ \} \end{array} \end{aligned}$$

5.15 Poišči minimum funkcionala $10x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 30x_4$ pri pogojih

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & \geq & 8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & \geq & 28 \end{array}$$

kjer so vsi $x_i \geq 0$.

5.16 Reši nalogo LP = (Φ, P, Max) , kjer je

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + 7y \leq 35, -x + 2y \leq 2, x, y \geq 0\}$$

$$P(x, y) = -3x + 6y$$

5.17 Reši nalogo LP = (Φ, P, Max), kjer je

$$P(x, y, z) = 2x + 6y + 5z$$

in

$$\Phi = \{(x, y, z) \in R^3 : \begin{array}{l} x + y + z = 3; \\ x + 2y + 3z \leq 10; \\ 2x + 6y + z \geq 5; \\ x, y, z \geq 0\} \end{array}$$

5.18 Reši optimizacijsko nalogo LP = (Φ, P, Min), kjer je

$$\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 7x + 6y + 3z \geq 20; \\ x + 4y + 8z \geq 15; \\ x, y, z \geq 0\} \end{array}$$

in

$$P(x, y, z) = 5x + 4y + 9z \ .$$

5.19 Reši optimizacijsko nalogo LP = (Φ, P, Max), kjer je

$$P(x, y, z) = 4x + 8z$$

$$\Phi = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad \begin{array}{r} 16x - y + 5z \leq 1, \\ 2x + 4z \leq 1, \\ 10x + y \leq 1, \\ x, y, z \leq 1 \end{array} \quad \}$$

5.20 Reši nalogo LP = (Φ, P, max), kjer je

$$\mathrm{P}(x,y,z) = 2x + 4y + 3z$$

$$\Phi = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 3y + 2z = 20, \ x + 5y \geq 10, \ x, y, z \geq 0 \ \}$$

5.21 Reši nalogo LP = (Φ, P, max), kjer je

$$\mathrm{P}(x,y,z) = 3x + y + 2z$$

$$\Phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x - y + 2z \le 20,\ 2x + y - z \le 10,\ x,y,z \ge 0 \}$$

5.22 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$, kjer je

$$\Phi = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ \begin{array}{rrrrl} x & +\ 5y & +\ z & & \le 10 \\ & 3y & +\ 2z & -w & \ge -8 \end{array} ,x \ge 0, y \le 0\}$$

$\mathrm{P}(x,y,z,w) = 3x - y + z - w$. (Pozor! z in w nista omejena.)

5.23 Reši optimizacijsko nalogo LP = (Φ, P, min), kjer je

$$\Phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{array}{rrrl} x + & 4y + & 2z & \ge 8 \\ 3x + & 2y & & \ge 6 \\ x, & y, & z & \ge 0 \end{array} \}$$

in je $\mathrm{P}(x,y,z) = 2x + 3y + z$

5.24 Reši optimizacijsko nalogo LP = (Φ, P, min), kjer je

$$\Phi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{array}{rrrrrrl} x & + & y & + & z & \le & 5 \\ 5x & - & y & & & \le & 6 \\ & & y & + & 2z & \le & 4 \end{array} ,\ x,y,z \ge 0 \}$$

$$P(x,y,z) = x - y + z$$

5.25 Reši nalogo LP = (Φ, P, min), kjer je

$$\Phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{array}{rrrl} x & +y & +\ z & \le 2 \\ 2x & +y & & \le 3 \\ 2x + y & +3z & & \ge 3 \end{array} ,\ x,y,z \ge 0\}$$

$$\mathrm{P}(x,y,z) = 4x + 4y + z.$$

5.26 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$, kjer je

$$\begin{array}{rcl} \Phi & = & \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & \ge & 5, \\ x & - & y & + & 2z & \ge & 10, \\ 2x & + & 3y & + & z & \le & -2, \\ x,z & \ge & 0, & & y & \le & 0 \end{array} \} \\ P(x,y,z) & = & x - 3y + 2z \end{array}$$

5.27 Reši nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$, kjer je

$$\Phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z \le 10,\ 3x + 3y + 2z \le 10,\ x,y,z \ge 0\}$$

$$P(x,y,z) = 2x + 7y + 4z$$

5.28 Reši nalogo LP = (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 4y & + & 3z & \le & 12, \\ x & + & 2y & + & z & \ge & -4, \\ & & x, & & z \ge 0,\ y & \le & 0 \end{array} \} \\ P(x,y,z) &= x - 3y + z \end{aligned}$$

5.29 Obravnavaj nalogo LP = $(\Phi, P_\lambda, \mathrm{Max})$ v odvisnosti od parametra $\lambda \in \mathbb{R}$, kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y) \in \mathbb{R} :\ \begin{array}{rl} -x+y & \le 3, \\ x+2y & \le 12, \\ 3x-y & \le 15, \\ x,y & \ge 0 \end{array} \} \\ P_\lambda(x,y) &= 2x + \lambda y \end{aligned}$$

5.30 Reši nalogo LP = (Φ, P, Min), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+y+z = 10,\ 7x+4y+8z \le 76, \\ &\quad 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le z \le 8\} \\ P(x,y,z) &= 3x + 5y + z \end{aligned}$$

5.31 Reši nalogo LP= (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y+ & z \le & 6, \\ 2x+ & y+ & 3z \ge & 2, \\ & x, & y \ge & 0, \\ & & z \le & 0 \end{array} \} \\ P(x,y,z) &= 5x - 2y + z \end{aligned}$$

5.32 Reši nalogo LP = (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{array}{rcrcrcr} -3x & - & 5y & + & 6z & \le & 4, \\ -x & - & 5y & + & 4z & \le & 5, \\ & & & & x,z & \ge & 0 \end{array} \} \\ P(x,y,z) &= -27x - 60y + 60z \end{aligned}$$

5.33 Reši nalogo LP= (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} \Phi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z \le & 4, \\ -x+ & 2y- & 2z \le & 6, \\ 2x+ & y & \le & 5, \\ x, & y, & z \ge & 0 \end{array} \} \\ P(x,y,z) &= x + 2y - z \end{aligned}$$

5.34 Reši nalogo LP= (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rrrcl} x+ & 2y+ & 4z-w & \le & 6, \\ 2x+ & 3y- & z+w & \le & 12, \\ x+ & & z+w & \le & 4, \\ & x, & y,\ z,\ w & \ge & 0 \end{array} \} \\
P(x,y,z,w) &= 2x+y+5z-3w
\end{aligned}$$

5.35 Reši nalogo LP $=$ (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & - & 3z & \ge & -30, \\ -2x & + & 2y & + & 3z & \le & 40, \\ x & \le & 0, & & y,z & \ge & 0 \end{array} \} \\
P(x,y,z) &= -4x + 3y + 6z
\end{aligned}$$

5.36 Reši nalogo LP $=$ (Ψ, Q, Min), kjer je

$$\begin{aligned}
\Psi &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2z & \ge & 8, \\ 3x & + & 4y & & & \ge & 6, \\ & & & x, & y,z & \ge & 0 \end{array} \} \\
Q(x,y,z) &= 2x + 3y + z
\end{aligned}$$

5.37 Reši nalogo LP $=$ (Ψ, Q, Max), kjer je $Q(x,y,z) = 3x+y-2z$ in

$$\Psi = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rcl} x-2y-z & \le & 10, \\ 2x+y+2z & \le & 12, \\ x-y+z & \le & 5, \\ x,y,z & \ge & 0 \} \end{array}$$

5.38 Reši optimizacijsko nalogo $(\Phi,\ P,\ \mathrm{Max})$, kjer je

$$\begin{aligned}
\Phi &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{array}{rcrcl} 4x & + & y & \le & 4, \\ 4x & - & 2y & \le & 1, \\ & x, & y & \ge & 0 \end{array} \} \\
P(x,y) &= |\, 2x - 3y \,|
\end{aligned}$$

5.39 Zapiši množico Φ določeno s sliko 3

ter reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min), kjer je

$$P(x,y) = \begin{cases} 2x+y & : x \le \frac{1}{2} \\ x+y+\frac{1}{2} & : x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Slika 3: Množica Φ **5.39**

1.6 Problemi, ki se jih da rešiti z linearnim programiranjem

6.1 V podjetju s tremi oddelki delata prvi in tretji oddelek s 30% min dobičkom, drugi pa z 20% min dobičkom. Investicijska sredstva, ki jih je za 40 denarnih enot, je treba razdeliti med oddelke tako, da bo skupni dobiček največji. Pri tem pa mora dobiti prvi oddelek vsaj 8, drugi vsaj 10 denarnih enot, tretji pa ne več od dvakratnega zneska za drugega. Poišči **vse** rešitve!

6.2 Zasebni prodajalec avtomobilov prodaja dva modela avtomobilov: model A in model T. Za naslednjih šest mesecev ima na voljo 600000 donarjev za nabavo avtomobilov. Nabavna cena modela A je 4000, modela T pa 3000 donarjev. Izkušnje kažejo, da porabi za prodajo enega avtomobila modela A 4 ure, za prodajo enega avtomobila modela T pa 6 ur. Za prodajo avtomobilov bo imel naslednjih šest mesecev na razpolago 960 delovnih ur. Predvideva, da bo imel z vsakim prodanim avtomobilom modela A dobiček v višini 15 odstotkov nabavne cene, z vsakim prodanim avtomobilom modela T pa 10 odstotkov nabavne cene. Da bo zadovoljil svoje stranke mora nabaviti vsaj 100 avtomobilov modela T. Nabavi lahko največ 100 avtomobilov modela A in največ 300 avtomobilov modela T.

Koliko avtomobilov vsakega od modelov naj nabavi za prodajo v naslednjih šestih mesecih, da bo imel čim večji dobiček?

6.3 PROIZVODNJA. Tovarna izdeluje iz treh vrst surovin $(1, 2, 3)$ štiri vrste izdelkov (A, B, C, D). Količine potrebnih surovin za izdelavo enote izdelka podaja tabela:

	1	2	3
A	2	3.5	4
B	4	2	1
C	2.5	2	3
D	1	3.5	2.5

Za izdelavo enote izdelka A potrebujejo 5 človek ur, za B, C in D pa 4, 3 oziroma 6 človek ur dela. Na voljo imajo 200, 300 oziroma 400 enot surovin 1, 2 oziroma 3 in 300 človek ur dela. Enota narejenih izdelkov vrst A, B, C oziroma D jim prinese dobiček v višini 7, 10, 5 oziroma 6 denarnih enot. Koliko enot izdelkov vsake vrste naj naredijo, da bodo dosegli čim večji dobiček?

6.4 JEDILNIK. Jedilnik mora vsebovati vsaj 8 enot živila A, vsaj 10 enot hranila B in vsaj 22 enot hranila C. Jedilnik sestavljamo iz jedi J, K in L. Enota jedi J stane 0.5 denarnih enot in vsebuje 5 enot živila A, 2 enoti hranila B in 1 enoto živila C; enota jedi K stane 0.8 denarnih enot in vsebuje 1 enoto živila A, 2 enoti hranila B in 5 enot hranila C; enota jedi L pa stane 0.6 denarnih enot in ne vsebuje hranila A, vsebuje pa 1 enoto hranila B in 4 enote hranila C.

Iz koliko enot vsake od jedi sestavimo najcenejši jedilnik z zahtevano količino vsebovanih živil?

6.5 Iz množice skladišč S je potrebno mesečno oskrbovati z blagom trgovine iz množice T. Cena prevoza je odvisna od skladišča in trgovine in je linearno odvisna od količine prepeljanega blaga. Kapacitete skladišč so omejene, trgovine pa zahtevajo mesečne dobave natanko enake njihovim potrebam. Želimo minimizirati stroške prevoza.

Zapiši kot nalogo linearnega programiranja.

6.6 RAZVOZ. Iz deponij premoga D_1 in D_2 je potrebno prepeljati premog do treh toplaren T_1, T_2 in T_3. Cena prevoza je linearno odvisna od razdalje med deponijo in toplarno in od prepeljane količine premoga. Razdalje, kapaciteti deponij in zahteve toplarn podaja tabela:

razdalje↘	T_1	T_2	T_3	kapaciteta (enot)
D_1	9	8	6	100
D_2	7	4	3	200
zahteve (enot)	140	50	110	

Kako oskrbimo toplarne z zahtevanimi količinami premoga (to je koliko premoga prepeljemo iz vsake deponije do vsake toplarne) ob čim manjših stroških prevoza? Reši nalogo s prevedbo na linearno programiranje.

6.7 Mizarstvo Les d.o.o. izdeluje stole, mize in klopi. Ozko grlo v proizvodnem procesu predstavljata stružnica in lakirnica. Izdelava vsakega stola zahteva 0.3 ure dela na stružnici in 0.1 ure dela v lakirnici; izdelava mize zahteva 0.4 ure dela na stružnici in 0.2 ure dela v lakirnici; za izdelavo klopi ne potrebujejo stružnice, potrebujejo pa 0.5 ure dela v lakirnici. Lakirnica je na voljo 150 ur, stružnica pa 120 ur mesečno. Vsak izdelan stol jim prinese 200, miza 500, klop pa 800 denarnih enot dobička. Koliko stolov, koliko miz in koliko klopi naj izdelajo mesečno, da bodo imeli čim večji dobiček? (Ni potrebno upoštevati, da je v proizvodnem procesu struženje pred lakiranjem.)

6.8 ZMESI. Ponarejevalci starin iz bronaste dobe se srečujejo z naslednjo nalogo:

V bronasti dobi so bron v kraju X izdelovali iz mešanice bakra, kositra, svinca in cinka v razmerju 35:8:5:2, zato morajo biti tudi ponaredki bronastih izdelkov iz kraja X narejeni iz take zlitine. Kot surovina so na voljo bronaste palice vrst A, B, C, D in E, katerih sestavo v odstotkih ter ceno opisuje tabela:

	baker	kositer	svinec	cink	cena/kg
A	95	4	1	0	2000
B	60	30	5	5	1400
C	50	30	15	5	1000
D	70	10	15	5	1600
E	80	5	5	10	1800

V kakšnem razmerju naj mešajo razpoložljive surovine (palice), da dobijo bron zahtevane sestave ob čim manjši ceni surovin?

Namig: naloga je podobna Nalogi o sestavljanju jedilnika, le da je nekaj neenačb potrebno zamenjati z enačbami.

6.9 Pivovarna izdeluje tri vrste piva: *ležaka*, *težaka* in *obležaka*. Poglavitne surovine, ki jih uporabljajo za izdelavo piva, so sladkor, slad in hmelj. Vsako uro lahko v vse tri procese proizvodnje piva dovajajo skupno največ 60 kg sladkorja, 40 kg sladu in 30 kg hmelja. Od vsakega soda zvarjenega *ležaka* iztržijo 300 tolarjev, od soda *težaka* 200 tolarjev, od soda *obležaka* pa 300 tolarjev čistega dobička. Proizvodni proces pri tem zahteva

med drugim $1\,kg$ sladkorja, $2\,kg$ sladu in $1\,kg$ hmelja za vsak sod zvarjenega *ležaka*, $2\,kg$ sladkorja, $1\,kg$ sladu in $1\,kg$ hmelja za sod zvarjenega *težaka*, ter $3\,kg$ sladkorja, $1\,kg$ sladu in $1\,kg$ hmelja za sod zvarjenega *obležaka*. Koliko vsake od naštetih vrst piva naj zvarijo vsako uro, da dosežejo največji čisti dobiček?
Zapiši kot nalogo linearnega programiranja in jo reši z uporabo metode simpleksov.

6.10 Kletar izdeluje tri vrste vina: črno, rose in belo vino. Količino enot potrebnih surovin za izdelavo enote vina in izkupiček od enote narejenega vina podaja tabela:

vrsta vina	temno grozdje	svetlo grozdje	sladkor	kemikalije	delo	izkupiček
črno	1.5	1.1	1.8	0.2	1.0	2
rose	3.0	0.5	1.6	0.5	1.5	3
belo	0.5	2.8	1.3	0.8	0.5	5

Kletar ima na voljo 300 enot temnega in 325 enot svetlega, 150 enot sladkorja in 220 enot dela. Koliko enot črnega, koliko roseja in koliko belega vina naj naredi, da bo skupni izkupiček največji?

Zapiši kot nalogo linearnega programiranja ter jo reši.

6.11 Kemična tovarna Parfum d.o.o. proizvaja deodorant maja. Za izdelavo potrebuje surovine in delo. Na voljo imajo dva različna proizvodna procesa. Rezultat vsakega od njiju je parfum maja, pri tem pa proces 1 porabi 1 enoto dela in 2 enoti kemikalij za 3 enote parfuma, proces 2 pa porabi 2 enoti dela in 3 enote kemikalij za 5 enot parfuma. Tovarno Parfum stane enota dela 3 donarje, enota kemikalij pa 2 donarja. V enem letu je na voljo 20000 enot dela in 35000 enot kemikalij. Predvidevajo, da bi brez reklame za parfum majo lahko prodali 1000 enot tega parfuma na leto. Da bi povečali povpraševanje pa lahko najamejo manekenko Majo, ki zahteva plačilo 100 donarjev na uro. Vsaka ura Majine reklame pomeni 200 enot prodanega parfuma več. Za prodano enoto parfuma maja Parfum iztrži 5 donarjev. Kako naj ravna Parfum d.o.o. da bi imel čim večji dobiček?

6.12 Tovarna avtomobilov izdeluje avtomobile in tovornjake. Vsako vozilo mora biti obdelano v sestavljalnici in lakirnici. Če barvajo samo tovornjake, jih lahko v lakirnici pobarvajo 40 na dan, če pa barvajo samo avtomobile, jih lahko pobarvajo 60 na dan. V sestavljalnici lahko sestavijo 50 vozil na dan. Vsak tovornjak prispeva 300 donarjev, vsak avtomobil pa 200 donarjev dobička. Določi, koliko tovornjakov in koliko avtomobilov naj proizvedejo dnevno, da bo dobiček največji.

6.13 Zapiši kot nalogo linearnega programiranja naslednjo nalogo:

V delavnici izdelujejo pet različnih izdelkov A, B, C, D in E. Vsak izdelek je obdelan na treh strojih P, R in S. Potrebne čase v minutah na kilogram izdelka prikazuje tabela:

	P	R	S
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

Stroj P je na voljo 96, stroj R 72 in stroj S 120 ur na teden. Tekoči obratovalni stroški strojev P, R in S so zaporedoma 4, 4 in 3 denot na uro. Cene potrebnega materiala za kilogram posameznega izdelka in prodajne cene za kilogram posameznega izdelka so podane v tabeli:

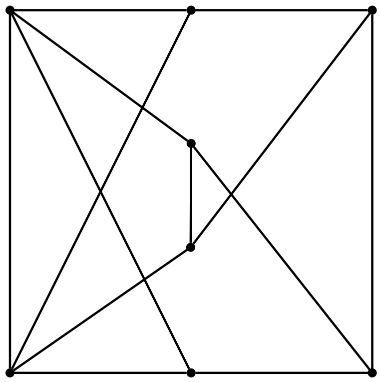
	A	B	C	D	E
cena materiala	2	1	2	1	1
prodajna cena	5	4	5	4	4

Koliko posameznega izdelka naj izdelajo, da bo zaslužek največji?
Koliko časa bo posamezni stroj zaseden?

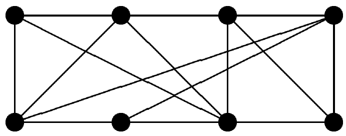
6.14 Izdelovalec televizorjev se mora odločiti, koliko barvnih in koliko črno-belih televizorjev naj proizvede mesečno v naslednjem obdobju. Tržna raziskava je pokazala, da bodo v tem obdobju mesečno lahko prodali največ 1000 barvnih in 4000 črno belih televizorjev. Mesečno imajo na voljo kvečjemu 50000 človek ur razpoložljivega dela zaposlenih delavcev, pri čemer za izdelavo barvnega televizorja porabijo 20, za izdelavo črno-belega pa 15 človek ur dela. Narejen (in prodan) barvni televizor prinese 60 donarjev dobička, črno bel pa 30 donarjev. Koliko črno-belih in koliko barvnih televizorjev naj proizvede vsak mesec, da bo mesečni dobiček čimvečji?

Zapiši kot nalogo linearnega programiranja ter ga reši.

Delavcem lahko plačajo nadure po 12 donarjev na uro. Ali s tem lahko povečajo mesečni dobiček? Koliko nadur dela se jim v tem primeru izplača najeti in za koliko največ lahko tako povečajo mesečni dobiček?



Slika 4: Graf **7.1**



Slika 5: Graf **7.2**

1.7 Diskretni optimizacijski problemi in ostalo

7.1 Določi barvnost grafa na sliki 4.

7.2 Določi barvnost grafa na sliki 5. Odgovor utemelji!

7.3 Določi barvnost grafa na sliki 6. Odgovor utemelji!

7.4 Določi barvnost grafa na sliki 7 in odgovor utemelji!

7.5 Določi barvnost grafa 8 in odgovor utemelji.

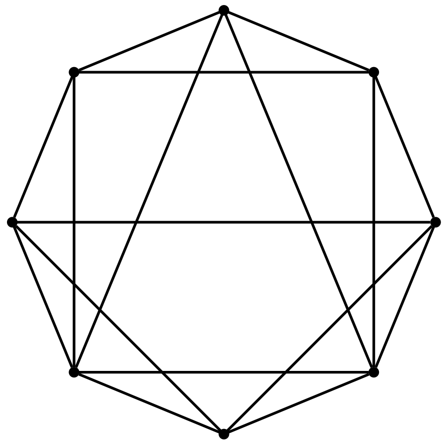
7.6 Določi barvnost grafa na sliki 9. Odgovor utemelji!

7.7 Določi barvnost grafa na sliki 10. Odgovor utemelji!

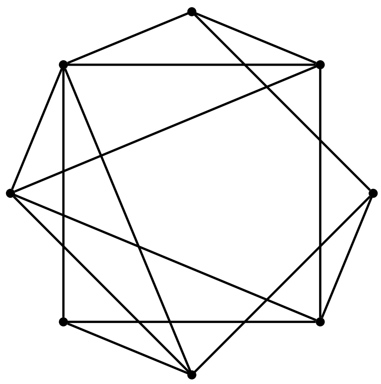
7.8 Določi kromatični polinom cikla C_n na n točkah.

7.9 Koliko najmanj barv potrebujemo za tako barvanje področij "zemljevida" na sliki 11, da dve sosednji področji nista iste barve? Odgovor utemelji. Ne pozabi barvati tudi neomejenega področja (zunanjosti).

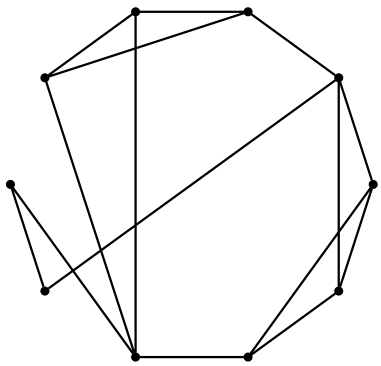
7.10 Sedem krajevnih televizijskih postaj želi postaviti po en oddajnik na različnih lokacijah. Oddaljeni oddajniki lahko uporabljajo iste frekvence, bližnji pa ne, ker bi se sicer



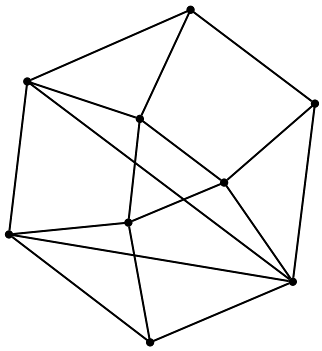
Slika 6: Graf **7.3**



Slika 7: Graf **7.4**



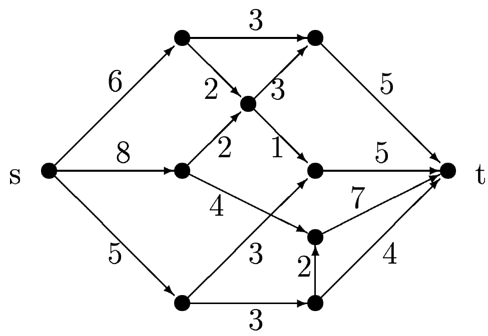
Slika 8: Graf **7.5**



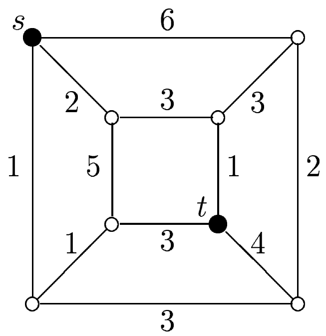
Slika 9: Graf **7.6**

Slika 10: Graf **7.7**

Slika 11: Zemljevid **7.9**



Slika 12: Omrežje **7.11**



Slika 13: Omrežje **7.12**

medsebojno motili. Pare bližnjih oddajnikov označujejo enice v tabeli

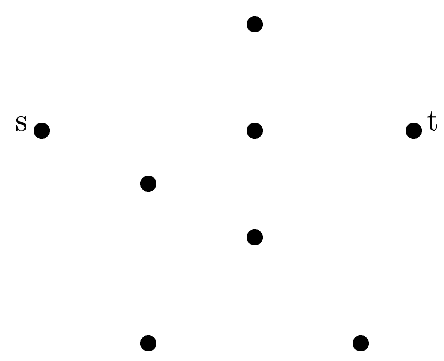
	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	1	0	1
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	1	1	0	1
d	0	0	1	0	1	1	0
e	1	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	1	1	0	0
g	1	0	1	0	1	0	0

Razdeli frekvence oddajnikom tako, da se medsebojno ne motijo, pri tem pa uporabi čim manjše število različnih frekvenc.

7.11 Za pretočno omrežje na sliki 12 določi največji pretok!

7.12 Določi največji pretok iz izvora s v ponor t po omrežju na sliki 13 Številke ob povezavah so kapacitete povezav in veljajo v obe smeri.

7.13 Za pretočno omrežje na sliki 14 določi največji pretok iz s v t! Številka ob krajišču



Slika 14: Omrežje **7.13**

Slika 15: Omrežje **7.14** . Številke ob točkah so izstopne prepustnosti.

povezave pomeni kapaciteto povezave, če po njej zapustimo točko.

7.14 Določi največji pretok iz S v T po omrežju na sliki 15.

7.15 Določi največji pretok po omrežju na sliki 16.

7.16 Poišči največji pretok po omrežju na sliki 17 ter odgovor utemelji.

7.17 Poišči največji pretok po omrežju na sliki 18 ter odgovor utemelji.

7.18 Določi največji pretok iz a v h po omrežju na sliki 19. Navedi povečujoče verige in najmanjši prerez.

7.19 Določi največji pretok iz izvora s v ponor t po omrežju na sliki 20. Številke ob povezavah so propustnosti povezav in veljajo v obe smeri.

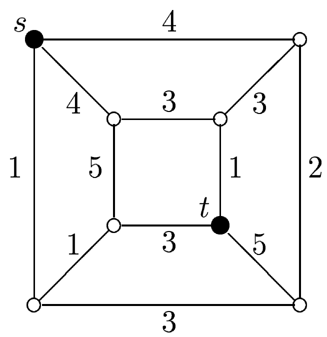
7.20 Poišči največji pretok iz s v t po omrežju na sliki 21. Odgovor utemelji tako, da poiščeš najmanjši prerez.

Slika 16: Omrežje **7.15**

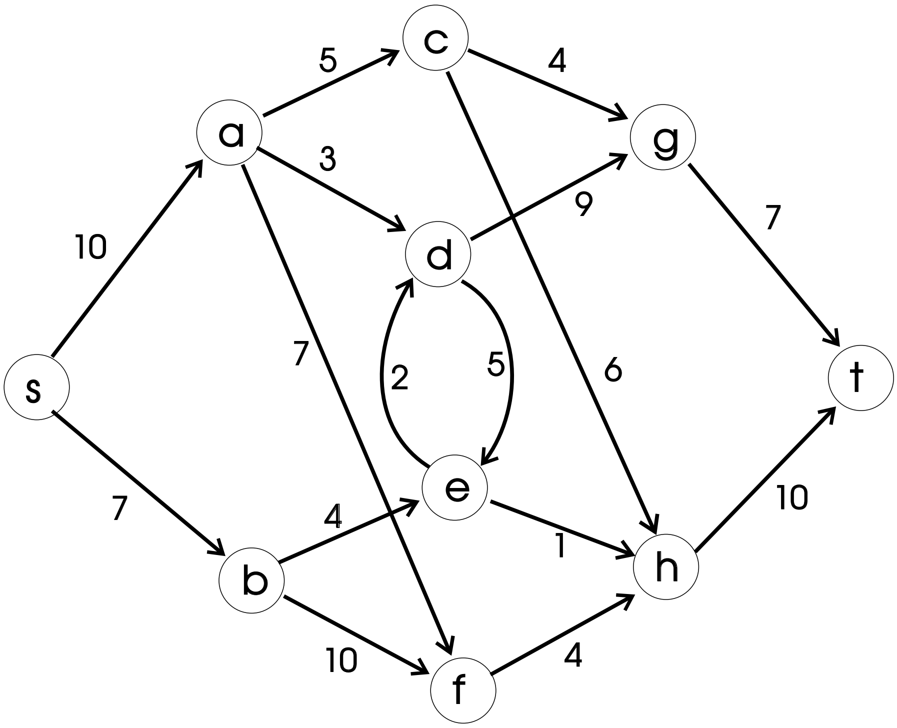
Slika 17: Omrežje **7.16**

Slika 18: Omrežje **7.17**

Slika 19: Omrežje **7.18**



Slika 20: Omrežje **7.19**



Slika 21: Omrežje **7.20**

Slika 22: Omrežje **7.21**

7.21 Poišči največji pretok iz s v t po omrežju na sliki 22 Poišči tudi najmanjši prerez.

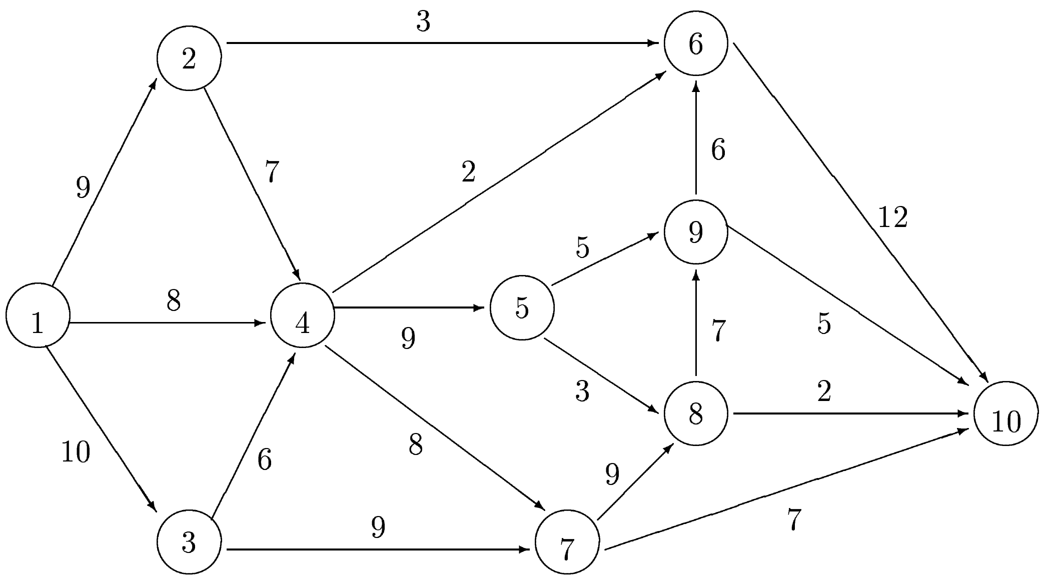
7.22 Dano je omrežje 23. Številka ob krajišču povezave pove koliko tisoč vozil na uro lahko pelje po tej povezavi iz danega krajišča.

a) Koliko največ vozil se lahko prepelje na uro skozi omrežje iz točke A v točko G.

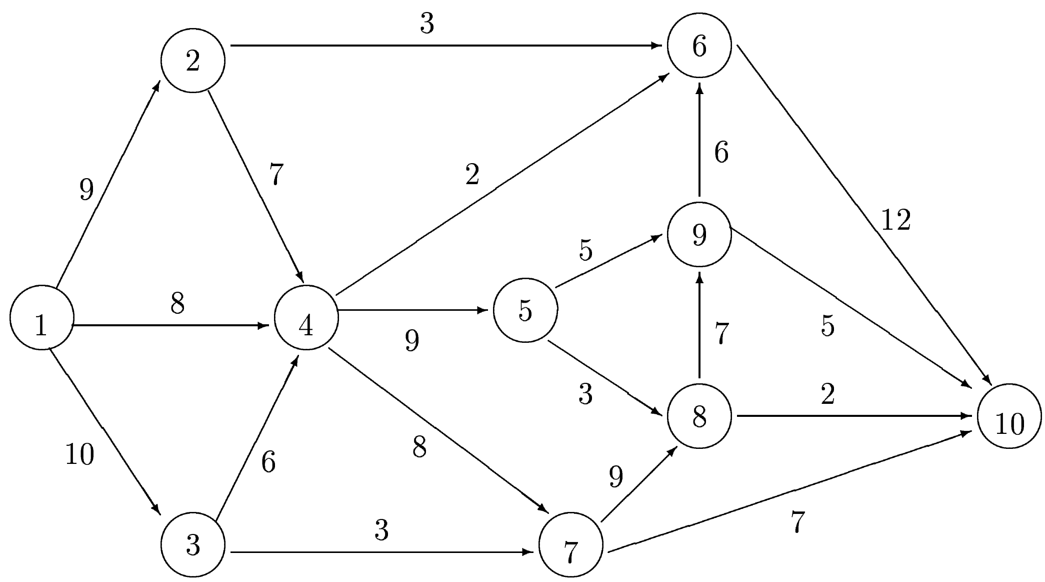
b) Ali lahko z izboljšanjem propustnosti ene povezave povečamo propustnost omrežja med A in G? Če lahko, katere in za koliko?

7.23 V omrežju na sliki 24:

Slika 23: Omrežje **7.22**



Slika 24: Omrežje **7.23**



Slika 25: Omrežje **7.24**

a) določi največji pretok iz izvora 1 v ponor 10;

b) recimo, da lahko poljubno povečate propustnost *ene* povezave. Katero povezavo bi za to izbrali, tako da bo povečanje pretoka največje? Za vsaj koliko je potrebno povečati njeno propustnost?

7.24 V omrežju na sliki 25:

a) določi največji pretok iz izvora 1 v ponor 10;

b) recimo, da lahko poljubno povečate propustnost *ene* povezave. Katero povezavo bi za to izbrali, tako da bo povečanje pretoka največje? Za vsaj koliko je potrebno povečati njeno propustnost?

Opozorilo: čeprav naloga izgleda enaka prejšnji, videz vara. Bralec, ki sam ne najde razlike, naj posveti pozornost povezavi 3–7.

7.25 V omrežju $(V,A,\{s,t\},c)$, kjer je s izvor, t ponor, $c\!:\!A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ propustnost, sta $(X,V\backslash X)$ in $(Y,V\backslash Y)$ minimalna prereza. Pokaži, da sta tedaj minimalna prereza tudi $(X\cap Y,V\backslash(X\cap Y))$ in $(X\cup Y,V\backslash(X\cup Y))$.

7.26 Poišči največji pretok po omrežju na sliki 26 iz vozlišča 1 v vozlišče 7, pri čemer imajo omejeno propustnost tako povezave kot nekončna vozlišča omrežja. Propustnosti povezav so navedene ob vsaki povezavi, propustnosti vozlišč pa podaja tabela

vozlišče	2	3	4	5	6
propustnost	5	9	4	6	5

Namig: prevedi nalogo na navadno nalogo pretoka po omrežju.

Slika 26: Omrežje **7.26**

Slika 27: Omrežje **7.28**

7.27 Peteršiljčkovi, Kremenčkovi in Simpsonovi se odpravljajo na piknik. Peteršiljčkovi in Simpsonovi so po štirje, Kremenčkovih pa je pet. Na voljo imajo štiri avtomobile. V prvem se lahko peljejo največ štirje, v drugem dva, v tretjem trije in v četrtem štirje, pri tem pa se v nobenem avtomobilu ne smeta peljati več kot dva člana iz iste družine. Prikaži kot nalogo največjega pretoka po omrežju in jo reši.

7.28 Slika 27 opisuje proizvodni proces nekega izdelka: kvadrati predstavljajo stroje, puščice poti (nedokončanih) izdelkov od stroja do stroja, številke v kvadratkih pa zmogljivost posameznega stroja. Pri tem na primer številka 7 pomeni, da ustrezni stroj lahko obdela 7 kosov na uro. Vsak izdelek vstopa v proizvodni proces na levi strani, nato v enem kosu opravi eno od možnih poti skozi proizvodni proces in izstopa na desni strani kot končan izdelek.

a) Koliko največ izdelkov lahko naredimo s proizvodnim procesom na sliki?

b) Ali lahko povečamo količino narejenih izdelkov na uro tako, da povečamo zmogljivost enega stroja za eno enoto? Če je mogoče, katerega?

Nalogo reši tako, da jo prevedeš na nalogo največjega pretoka skozi omrežje. Nariši ustrezno omrežje!

7.29 Sedem tipov tovora, po štiri zabojnike vsakega tipa, je potrebno prepeljati s petimi letali, ki lahko prepeljejo po 7, 7, 6, 4 in 4 zabojnike. Kako je potrebno naložiti tovor, če nobeno letalo ne sme peljati dveh ali več zabojnikov istega tipa tovora?

Nalogo reši tako, da jo prevedeš na nalogo največjega pretoka skozi omrežje. Nariši ustrezno omrežje!

7.30 21 paketov sedmih tipov, po tri pakete vsakega tipa, moramo naložiti na pet tovornjakov. Na prvem tovornjaku je prostora za 6, na drugem za 4, na tretjem za 5, na četrtem za 4 in na petem za 3 pakete.

a) Prevedi na nalogo največjega pretoka po omrežju naslednjo nalogo:

b) Ali lahko naložimo vseh 21 paketov na tovornjake tako, da so vsi paketi na posameznem tovornjaku različni?

7.31 Reši *celoštevilsko* optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), kjer je

$$P(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$$
$$\Phi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 2x_1 - x_2 \leq 9,\ 2x_1 + 8x_2 \leq 31,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

7.32 Reši naslednjo celoštevilsko optimizacijsko nalogo LP $= (\Phi, P, \mathrm{Min})$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x + 5y \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \geq 2,\ 3x + 5y \leq 19,\ 5x + 3y \leq 15\ \} \end{aligned}$$

7.33 Določi množico $\mathrm{Max}(\Phi, P)$ za optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max), kjer je

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x + y \\ \Phi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid\ 14x + 9y \leq 51,\ 6x - 3y \geq -1\ \} \end{aligned}$$

7.34 Z dinamičnim programiranjem reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Max)

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= 2(x+1)x + 3(y+2)y + 4z^2 \\ \Phi &= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{N}_0^3 \mid\ x + y^2 + 2z \leq 5\ \} \end{aligned}$$

7.35 Reši nalogo celoštevilskega linearnega programiranja (Φ, P, max), kjer je

$$\Phi = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3;\ 4x + 3y + 4z \leq 20,\ x,y,z \geq 0\ \}$$

$$P(x,y,z) = 6x + 5y + 2z$$

7.36 Reši nalogo celoštevilskega linearnega programiranja (Φ, P, Min), kjer je $P(x,y) = 6x - 2y$ in

$$\begin{aligned} \Phi = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 :\quad x + y &\geq 2, \\ -3x + y &\leq 1, \\ x - 2y &\leq 1, \\ x, y &\geq 0\,\} \end{aligned}$$

7.37 Tovornjak ima nosilnost 20 t. Tovor lahko sestavimo iz (nedeljivih) predmetov treh vrst.

vrsta	teža (t)	vrednost
A	3	4
B	4	5
C	5	6

Kako (koliko predmetov posamezne vrste) naj bo sestavljen tovor, da bo njegova vrednost največja?

7.38 V grafu z dano matriko razdalj poišči najkrajšo pot od četrte do sedme točke.

$$\begin{bmatrix} 0 & - & - & - & - & - & 10 & - \\ 8 & 0 & - & - & 7 & 9 & - & - \\ 2 & - & 0 & - & 3 & 4 & - & - \\ - & 3 & 6 & 0 & - & - & - & 5 \\ - & - & - & - & 0 & - & 11 & - \\ - & - & - & - & - & 0 & 9 & - \\ - & - & - & - & - & - & 0 & - \\ 5 & - & - & - & 4 & 6 & - & 0 \end{bmatrix}$$

7.39 Med kraji $A, B, \ldots, J$ bi radi napeljali telefonsko omrečje, tako da bi lahko iz vsakega kraja telefonirali v drugega in seveda, da bi bila skupna dolžina omrežja čim manjša. Razdalje med kraji podaja naslednja tabela:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	8	5	9	12	14	12	16	17	22
B		0	9	15	17	8	11	18	14	22
C			0	7	9	11	7	12	12	17
D				0	3	17	10	7	15	18
E					0	8	10	6	15	15
F						0	9	14	8	16
G							0	8	6	11
H								0	11	11
I									0	10
J										0

7.40 Dana je množica $\{ T_1, T_2, ...T_n \}$ točk v ravnini. Vsak par točk (T_i, T_j), $i \neq j$, povežemo z daljico in ji za vrednost pripišemo njeno dolžino d_{ij}. Pokaži, da se daljice, ki sestavljajo najkrajše vpeto drevo v tako dobljenem grafu, ne sekajo.

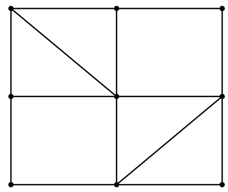
7.41 V ravnini je dana množica n točk $\{ (x_i, y_i);\ i = 1, 2, ..n \}$ v splošni legi (nobena trojica ne leži na skupni premici). Vse točke želimo povezati s čim krajšo sklenjeno krivuljo, ki gre skozi vse točke. Pokaži, da optimalna krivulja ne seka same sebe. Pri tem upoštevaj, da je najkrajša krivulja med dvema točkama daljica.

7.42 Dana je množica $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$, $T_i = (x_i, y_i)$ točk v ravnini. Vsak par točk T_i, T_j povežemo z daljico T_iT_j in ji za vrednost pripišemo njeno dolžino d_{ij}.
Pokaži, da v tem grafu obstaja najkrajše vpeto drevo, ki nima nobene točke stopnje (število sosednjih točk) večje od 5.

7.43 Kako bi reševal(a) naslednjo optimizacijsko nalogo:

Dan je enostaven povezan neusmerjen graf $G = (V, E)$, $V = 1..n$. Določi permutacijo $\pi \in \mathcal{S}_n$, ki minimizira izraz:

$$\sum_{(p,q)\in E} |\ \pi(p) - \pi(q)\ |$$



Slika 28: Neusmerjen graf **7.45**

Določi čim boljšo rešitev za graf:

7.44 Dana je kvadratna matrika A reda $n \times n$. Radi bi določili preslikavo $\pi : 1..n \mapsto \{-1, 1\}$, tako da bo vsota

$$\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\pi(i)\pi(j)$$

najmanjša. Pokazati je mogoče, da je problem NP-težek.

a) reši nalogo za matriko A:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

b) sestavi postopek lokalne optimizacije za ta problem.

7.45 Dan je povezan neusmerjen graf $G = (V, E)$. Povezave grafa G želimo usmeriti tako, da bo dobljeni usmerjeni graf $G' = (V, A)$ krepko povezan in bo *premer*

$$R(G') = \max_{u,v \in V} \left(\min_{S \text{ je sprehod}} |S(u, v)| \right)$$

čim krajši.
Opomba: $|S|$ pomeni število povezav v sprehodu S.

a) Kdaj je naloga rešljiva?

b) Za graf na sliki 28 poišči čim boljšo rešitev.

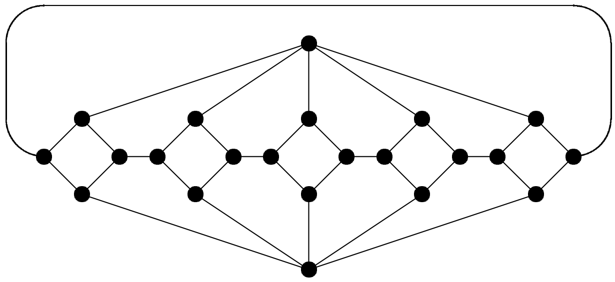
c) Podaj zamisel postopka za reševanje naloge.

7.46 Točke neusmerjenega grafa bi radi pokrili s čim manj različnimi potmi, tako da vsaka točka pripada natanko eni poti. Dovoljena je tudi ničelna pot, ki vsebuje eno samo točko.

a) Zapiši kot optimizacijsko nalogo. Kaj znaš povedati o njem? Podaj zamisel čim učinkovitejšega postopka za reševanje te naloge.

b) Določi čim boljšo rešitev za graf na sliki 29. Koliko najmanj poti je potrebnih za pokritje grafa G_n, $n \ge 2$?

G_5 :



Slika 29: Graf **7.46**

Slika 30: Tiri s kretnico **7.48**

7.47 n predmetov z znanimi površinami p_i želimo pobarvati z n različnimi barvami (vsakega z eno od barv) z znanimi cenami c_i za enoto pobarvane površine.

a) Reši nalogo za $n = 5$ in $p = (3, 4, 5, 5, 6)$, $c = (4, 5, 6, 6, 8)$. Ne pozabi pokazati, da je rešitev res optimalna.

b) Kako bi reševal problem v splošnem? Postopek utemelji.

7.48 Kompozicija je sestavljena iz lokomotive in n vagonov, ki so oštevilčeni s številkami od 1 do n, vsak vagon s svojo številko. Kompozicija stoji na tirih položenih v obliki črke Y z eno kretnico kot na sliki 30 Kretnica je lahko v dveh položajih: v enem povezuje levi tir z zgornjim desnim, v drugem pa s spodnjim desnim. Na začetku stoji kompozicija na levem tiru.

Lokomotiva lahko poriva ali vleče kompozicijo, ki jo je možno odpeti na kateremkoli mestu med vagoni ali med vagonom in lokomotivo. Potrebno je urediti kompozicijo tako, da lokomotivi sledijo vagoni označeni v naraščajočem vrstnem redu, pri tem pa čim manjkrat preklopimo kretnico.

a) Opiši, kako bi najučinkoviteje uredil kompozicijo L87456321. Koliko preklopov kretnice je za to potrebnih?

b) Pokaži, da se da urediti kompozicija, označena v poljubnem vrstnem redu.

c) Opiši **učinkovit** postopek urejanja kompozicije, označene v poljubnem vrstnem redu. Oceni največje potrebno število preklopov kretnice pri urejanju kompozicije dolžine n po tem postopku.

2. Rešitve

2.1 Postavitev optimizacijske naloge

1.1

a) Na disku imamo n datotek. Datoteke v poljubnem vrstnem redu oštevilčimo z naravnimi števili od 1 do n, diskete pa z naravnimi števili, saj vnaprej ne vemo, koliko jih bomo potrebovali. Razporeditev datotek po disketah je enolično določena, če za vsako datoteko vemo, na kateri disketi je datoteka. Razporeditev torej lahko opišemo z vektorjem x dolžine n, katerega komponente x_i so številke disket. Pri tem vsaka komponenta ustreza po eni datoteki. Tako je $\Omega = \mathbb{N}^n$ Označimo sedaj s števili d_i dolžino i-te datoteke v zlogih. Vsota dolžin datotek na vsaki od disket ne sme presegati m zlogov. To formalno opišemo z

$$\Phi = \{ x \in \mathbb{N}^n \mid \forall j \in \mathbb{N} : \sum_{i:x_i=j} d_i \leq m \}$$

Kriterijska funkcija je seveda število porabljenih disket. Nič pa ni narobe, če zanjo vzamemo kar največjo številko neprazne diskete, saj tako avtomatično odpadejo rešitve, pri katerih ne uporabimo le disket z najnižjimi številkami. Torej

$$P(x) = \max_{i \in 1..n} x_i$$

Ustrezna optimizacijska naloga je $(\Phi, P, \in \text{Min})$.

Opomba: Povsod, kjer za opis rešitve uporabimo vektor z n komponentami, lahko uporabimo tudi funkcijo, ki število i preslika v i-to komponento vektorja. Tako lahko nalogo formaliziramo še drugače:

$$\Omega = \mathbb{N}^{\{1,2,\ldots,n\}} = \text{množica vseh funkcij } f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\Phi = \{ f \in \Omega \mid \forall j \in \mathbb{N} : \sum_{i \in f^{-1}(j)} d_i \leq m \}$$

$$P(f) = \max(\{1, 2, \ldots, n\}, f)$$

b) Ustrezen problem je NP-poln. Take naloge običajno bolj ali manj uspešno rešujemo s hevristikami.

1.2 Lego vsakega od krogov lahko opišemo z lego njegovega središča. V ta namen vpeljemo kartezični koordinatni sistem na plošči tako, da plošča v celoti leži v prvem kvadrantu in da eno od njenih ogljišč leži v izhodišču. Razporeditev krogov na plošči tedaj opišemo s končno množico točk, namreč njihovih središč

$$\Omega = \{ A \subseteq [r, a-r] \times [r, b-r] \mid |A| \in \mathbb{N}_0 \}$$

Seveda so dopustne le tiste razporeditve, pri katerih se notranjosti krogov ne sekajo, torej

$$\Phi = \{ A \in \Omega \mid \forall T_1 \in A \, \forall T_2 \in A : d(T_1, T_2) \geq 2r \text{ ali } T_1 = T_2 \}$$

Kriterijska funkcija je število krogov, torej

$$P(A) \;=\; |A|$$

Ustrezna optimizacijska naloga je (Φ, P, Max).

1.3 Eno od košar označimo z 0, drugo pa z 1. Razporeditev jabolk v košari tedaj lahko opišemo z vektorjem x enic in minus enic dolžine $2n$:

$$\Omega \;=\; \Phi \;=\; \{-1, 1\}^{2n}$$

Kriterijska funkcija je tedaj absolutna razlika teže košar:

$$P(x) \;=\; \left|\sum_{i=1}^{n} x_i t_i\right|$$

Ustrezna optimizacijska naloga je $(\Phi, P, \in \mathrm{Min})$.

1.5 Množico dopustnih rešitev lahko zapišemo z

$$\Omega \;=\; \{\ \{[x_i, y_i] | \ i \in 1..k\} \mid \forall i \in 1..k \ : \ x_i \le y_i \text{ in } E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} [x_i, y_i]\ \}$$

Pojem *čim krajši intervali* si lahko razlagamo na dva načina:

- tako, da je najdaljši med intervali čim krajši; tedaj je kriterijska funkcija

$$P(\{[x_i, y_i] : \ i \in 1..k\}) \;=\; \max\{\ y_i - x_i \mid \ i \in 1..k\ \}$$

- tako, da je vsota dolžin intervalov čim krajša; tedaj je

$$P(\{[x_i, y_i] : \ i \in 1..k\}) \;=\; \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)$$

V obeh primerih je optimizacijska naloga tipa (Φ, P, Min).

1.6 22, 23, 22, 22, 22, 23

1.7

a) (Φ, P, Min), kjer je
Φ množica cikličnih permutacij n elementov in

$$P(\pi) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{\pi(i)}|$$

b) in

c) $\min(\Phi, P) = 10$,

$$\text{Min}(\Phi, P) = \{ (1 i_1 i_2 ... i_k 6 j_1 j_2 ... j_l) \mid i_1 < i_2 < ... < i_k, \\ j_1 > j_2 > ... > j_l,\ k, l \in \mathbb{N}_0,\ k + l = 4 \}$$

Utemeljitev: Naloga je poseben primer *problema trgovskega potnika*, kjer je potrebno "obiskati" n točk ležečih na realni osi. Če začnemo sprehod v najmanjšem številu a_m, v našem primeru je to število 1, moramo opraviti pot najmanj enako $2(a_M - a_m)$, kjer je a_M največje izmed števil, v našem primeru 6, da obiščemo vsa števila in se vrnemo v izhodišče. Optimalno rešitev torej dobimo tako, da na poti od a_m do a_M in nazaj sproti obiščemo še vsa preostala štavila, vsako po enkrat.

Optimalno rešitev prvotne naloge torej dobimo tako, da poiščemo največje in najmanjše med števili, ju razmestimo na krožnico, nato pa na krožna loka med njiju postavimo preostala števila v naraščajočih vrstnih redih v smeri od a_m proti a_M.

Vidimo, da je "bistveno različnih" cikličnih vrstnih redov, ki rešijo nalogo, 2^{n-2}, če zrcalni sliki razlikujemo, sicer pa polovico manj razen za $n = 2$. To seveda velja le, če so števila a_i paroma različna.

1.9

a) $\Phi = \{ \sigma \mid \sigma$ je enostaven sprehod po mreži $\}$

b) 34 : začnemo v točki $(0, 1)$, nato pa gremo `dol, desno, gor, levo, gor, desno, gor, levo, gor, desno, dol, desno, dol, levo, dol, desno, dol, desno, gor, levo, gor, desno, gor, levo, gor, desno, dol, desno, dol, levo, dol, desno, dol, levo`.

1.12 Namig: Na šahovnici uvedi *manhattansko razdaljo* med polji.

1.15

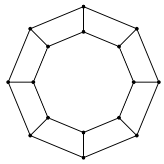
b) Izhajamo iz končne razporeditve $5, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 1, 0, 0$, pribijemo elemente, ki so na istih mestih kot v začetni razporeditvi, nato pa na vsakem koraku na prazno mesto postavimo po enega od preostalih elementov. Zadeva se izide, sedem opravljenih korakov (v obratni smeri) pa je očitno optimalno, saj je v neurejenem zaporedju sedem neničelnih elementov na napačnih mestih glede na urejeno zaporedje.

1.16

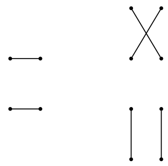
a) $(\Phi, P, \in \text{Min})$, kjer je

$$\Phi = \{ G \mid V(G) = \{(x_i, y_i) :\ i \in 1..2n\} \text{ in je } G \text{ kubičen graf} \}$$

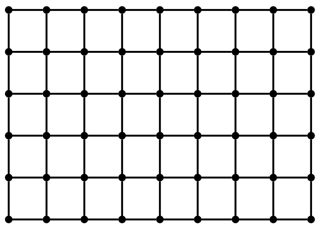
$$P(G) = \sum_{e \in E(G)} d(e) \quad \text{(kjer je } d \text{ evklidska dolžina povezave } e\text{)}$$



Slika 31: Začetni približek **1.16**



Slika 32: Transformaciji lokalne optimizacije **1.16**



Slika 33: Primer postavitve servisov **1.17**

b) Eden od možnih pristopov je naslednji.
Začetni približek je graf $C_n \times P_2$, prikazan na sliki 31, nato pa na vsakem koraku naredimo transformacijo, shematično predstavljeno na sliki 32.

1.17

a) $(\Phi, P, \in \text{Min})$, kjer je

$$\Phi = \{ A \subseteq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \mid |A| = k \}$$

$$P(A) = \max_{(x,y)\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m} \left(\min_{(x',y')\in A} (|x-x'| + |y-y'|) \right)$$

kjer smo z $\mathbb{Z}_n$ označili množico n celih števil $0..n-1$.

b) Ena od rešitev je prikazana na sliki 33. Pri taki razporeditvi servisov je $P = 3$.
Pokazati je še treba, da je rešitev optimalna, da torej petih sevisov ni mogoče postaviti v križišča danega omrežja ulic tako, da bi bila preostala križišča od njih oddaljena manj ali kvečjemu 2. Dokaz avtorja prepuščava v razmislek bralcu.

c) Uporabimo lahko več različnih pristopov za reševanje naloge, na primer

- algoritem lokalne optimizacije z "dobrim" začetnim približkom,
- hevrističen algoritem z upoštevanjem kriterija in ugotovitev, do katerih se dokopljemo v dokazu pod točko **b)**,
- *požrešno metodo*, kjer sproti povečujemo minimalno vrednost.

1.19

a) $(\Phi, P, \in \text{Min})$, kjer je

$$\Phi = \{ \, b \; : \; V(G) \to \mathbb{N}^+ \mid \forall u, v \in V(G) \; (\, uv \in E(G) \Rightarrow b(u) \neq b(v) \,) \, \}$$

$$P(b) = \sum_{v \in V(G)} b(v)$$

b) Minimalni številski barvanji imata vrednost 12: vse točke stopnje 1 pobarvamo z barvo 1, preostali točki pa z barvama 2 in 3, vsako z drugo barvo. Dokaz optimalnosti tako dobljenega barvanja avtorja prepuščava bralcu.

1.20

a) V polnem grafu, katerega točke so poslanci, utežimo povezave, ki povezujejo pare skreganih poslancev z 1, preostale povezave pa z 0. Problem se prevede na problem iskanja minimalnega enostavnega obhoda grafa.

b) Možnih je več standardnih pristopov, temelječih na lokalni optimizaciji. Vsi začnejo z (naključnim) enostavnim obhodom grafa, razlikujejo pa se v sosednosti obhodov oziroma v potezah, ki prevedejo obhod v obhod, na primer *2-opt* ali *3-opt*, pa tudi v načinu izbiranja poteze med možnimi.

1.21

a) Lego kvadrata predstavimo na primer z lego levega zgornjega ogljišča.
$\Omega = ((x_i)_{i=1...n}, (y_i)_{i=1...n})$ kjer $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1...n$
Omejitve: $\Phi \subseteq \Omega$, da velja

$$\forall ((x_i)_{i=1...n}, (y_i)_{i=1...n}) \in \Phi, \; \forall i, j \in 1..n \; (i \neq j) \; :$$

$$x_i + a_i \leq x_j \;\text{ ali }\; x_j + a_j \leq x_i \;\text{ ali}$$

$$y_i + a_i \leq y_j \;\text{ ali }\; y_j + a_j \leq y_i \;\text{ ali}$$

Kriterijska funkcija:

$$P\Big(((x_i), (y_i))\Big) = \max \Big\{ \max_{i,j}(x_j + a_j - x_i), \max_{i,j}(y_j + a_j - y_i) \Big\}$$

Naloga je tipa $(\Phi, P, \in \text{Min})$

b) 21×21

1.22

a) Šahovnico lahko formalno predstavimo z grafom, katerega točke ustrezajo poljem šahovnice, točki pa sta povezani, če konjiček lahko v eni potezi preskoči med ustreznima poljema.

Zaradi krajšega zapisa označimo polja šahovnice z znaki 1..9 in A..C.

Zapišemo $G = (V, E)$, kjer je
$V = \{$1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C$\}$ in $E = \{$16,18,27,29,34,38,49,4B,5A,5C,67,6B,7C,9A$\}$.
Kot je razvidno s slike, je graf ravninski.

Trenutno stanje na šahovnici opišemo s položaji belih in črnih konjičkov:

$$S = \{ (X, Y) \mid X, Y \subset V,\ X \cap Y = \emptyset,\ |X| = |Y| = 3 \}$$

kjer množici X in Y opisujeta položaje belih oziroma črnih konjičkov.

Med stanji dovolimo *bele* in *črne* prehode, odvisno od tega, katere barve konjiček spremeni položaj.

$$(X, Y) \overset{\text{bel}}{\leftrightarrow} (X', Y) \iff (X, Y), (X', Y) \in S \& (\ \exists u \in X,\ \exists u' \in X'\ :\ X \backslash \{u\} = X' \backslash \{u'\} \& uu' \in E\ )$$

$$(X, Y) \overset{\text{črn}}{\leftrightarrow} (X, Y') \iff (X, Y), (X, Y') \in S \& (\ \exists v \in Y,\ \exists v' \in Y'\ :\ Y \backslash \{v\} = Y' \backslash \{v'\} \& vv' \in E\ )$$

Relacija prehodov je simetrična in antirefleksivna, torej jo lahko predstavimo z enostavnim neusmerjenim grafom. Graf ima blazno mnogo točk, valence točk pa so nepojmljivo velike, tako da ga ne bomo narisali. Če povezavam pripišemo še isto barvo kot je barva prehoda, ki mu povezava ustreza (očitno je barva povezave enolično določena, saj ustreza preskoku le po enega konjička, ta pa je točno določene barve), tedaj lahko zastavimo nalogo najkrajše poti med dvema točkama v grafu stanj, ki vsebujejo zaporedne povezave različnih barv.

Φ definiramo kot množico izmenoma črno–belih (s, t)–poti v grafu stanj, kjer sta s in t stanje na sliki in na sliki z zamenjanima barvama konjičkov, torej
$s = (\{$A,B,C$\}, \{$1,2,3$\})$ in $t = (\{$1,2,3$\}, \{$A,B,C$\})$,
kriterijsko funkcijo P pa kot dolžino poti. Tedaj prvotna naloga enakovredna nalogi (Φ, P, Min).

b) Konjičke je mogoče zamenjati v 18 potezah. Naštejmo povezave ustrezne "črno-bele" poti v poenostavljeni notaciji:

beli	črni
C–7	3–4
7–6	2–7
A–9	7–C
6–7	1–6
7–2	6–7
B–6	4–B
6–1	C–5
9–4	5–A
4–3	7–C

Avtorjema doslej ni znano, ali je 18 res najmanjše možno število, vendar je kaj drugega zelo malo verjetno, saj bi sicer zamenjavo lahko opravili že v 14 (10, 6...) potezah, saj

2	3	2	3	2	3	3	3
1	2	1	3	3	2	3	3
2	3	2	1	2	2	3	3
2	0	2	2	2	2	2	3
2	3	1	1	1	3	3	2
1	1	1	3	2	1	2	3
2	2	2	0	2	2	3	2
2	1	2	2	2	1	2	3

Slika 34: "Konjska razdalja" polj šahovnice od konjičkov **1.23**

so možna le soda števila potez, števili zasedenih črnih in belih polj sta namreč na začetku in koncu enaki, vsak preskok pa konjiček opravi med poljema različnih barv. Po drugi strani se števili polj, ki jih na začetku in na koncu zasedajo konjički vsake od barv spremenita, torej morajo beli konjički opraviti skupaj liho mnogo potez, enako pa velja tudi za črne konjičke. Ker se število potez konjičkov vsake od barv lahko razlikuje kvečjemu za 1, je tako skupno število potez lahko le $2(1 + 2k)$, ko $k \in \mathbb{N}_0$. Vsak konjiček mora opraviti vsaj dve potezi, saj v eni ne more prečkati šahovnice, torej je skupno število potez najmanj 12. še več: vsaj po en konjiček mora zamenjati barvo polja, torej je skupno število potez vsaj 14. Pokazati bi bilo le še treba, da zamenjave v 14 potezah ni mogoče opraviti. To vsekakor lahko naredimo s pomočjo računalnika, vendar bi v duhu stare Ruske šole mnogo lepše izgledala rešitev z logičnim sklepom.

c) Morda s postopkom iskanja najkrajše poti v grafu z dodatnim upoštevanjem vrstnega reda barv, na primer z gradnjo poti v širino.

1.23

a) Šahovnico lahko predstavimo z grafom: točke grafa so polja šahovnice, sosednji pa sta polji, med katerima lahko (v eni potezi) preskoči šahovski konjiček. Postavitev k konjičkov predstavimo s podmnožico moči k točk grafa.
Elementi $S \in \Phi$ so torej vse podmnožice s k elementi.
Kriterijska funkcija $P(S)$ je največja razdalja kake točke grafa do njej najbližjega elementa množice S.
Optimizacijska naloga je tipa $(\Phi, P, \in \text{Min})$.

b) Ena od optimalnih rešitev je šahovnica, prikazana na sliki 34, kjer številke na poljih pomenijo grafno razdaljo do najbližjega konjička; konjička torej stojita na poljih, označenih z 0.
Pkazati je le še treba, da dva konjička v dveh skokih nikakor ne moreta doseči vsakega polja šahovnice. Diagonalno nasproti si ležeči polji sta na medsebojni grafnoi razdalji strogo4, torej ju ne moremo doseči z istim konjičkom v po dveh skokih. Z upoštevanjem barv polj (konjiček namreč vedno skače med poljema različnih barv) ni težko pokazati, da preostalih diagonalno nasproti si ležečih polj s tako postavljenima konjičkoma ni mogoče doseči v manj kot treh skokih, saj je razdalja med poljema prvega in drugega para vsaj 5.

1.24

a) Če $x \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$, tedaj velja za vsak $y \in \Phi$ bodisi $P(x) = P(y)$, bodisi $P(x) < P(y)$. V prvem primeru je $0 = \mathrm{sign}(P(x) - P(y)) = \mathrm{sign}(Q(x) - Q(y))$, torej je $Q(x) = Q(y)$. V drugem primeru je po podobnem sklepu $Q(x) < Q(y)$.
Skupaj je torej $Q(x) \leq Q(y)$. Ker to velja za vsak $y \in \Phi$, $x \in \mathrm{Min}(\Phi, Q)$, torej smo pokazali

$$\mathrm{Min}(\Phi, P) \subseteq Min(\Phi, Q)$$

Na enak način pokažemo še $\mathrm{Min}(\Phi, Q) \subseteq Min(\Phi, P)$ tako, da v pravkar navedenem dokazu zamenjamo vlogi P in Q, saj v trditvi, ki jo dokazujemo, nastopata simetrično.

b) Naj $x^* \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$ in $z \in \Psi$. Tedaj je
$\mathrm{sign}(Q(z) - Q(\tau(x^*))) = \mathrm{sign}(P(\sigma(z)) - P(\sigma(\tau(x^*))))$, saj je $Q \asymp P \circ \sigma$. Upoštevamo še, da je $P \circ \sigma \circ \tau = P$ in označimo $y = \sigma(z)$, pa dobimo
$\mathrm{sign}(Q(z) - Q(\tau(x^*))) = \mathrm{sign}(P(y) - P(x^*)) \in \{0, 1\}$, saj $x \in \mathrm{Min}(\Phi, P)$. Ker omenjeni sklep velja za vsak $z \in \Psi$, je torej $\tau(x^*) \in \mathrm{Min}(\Psi, Q)$.
$\mathcal{Q.E.D}$.

2.2 Konveksnost

2.1 Naj bosta $x, y \in \Phi + \Psi$ tako, da je $x = u + v$ ter $y = s + t$ in $u, s \in \Phi$ ter $v, t \in \Psi$. Tedaj je zaradi konveksnosti množic Φ in Ψ $\lambda u + (1-\lambda)s \in \Phi$ in $\lambda v + (1-\lambda)t \in \Psi$ za vsak $\lambda \in [0,1]$. Zpišimo sedaj

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(u+v) + (1-\lambda)(s+t) = \\ &= (\lambda u + (1-\lambda)s) + (\lambda v + (1-\lambda)t) \in \Phi + \Psi \end{aligned}$$

Ker slednje velja za poljubna $x, y \in \Phi + \Psi$ ter $\lambda \in [0,1]$, je $\Phi + \Psi$ konveksna množica.

2.2 Ideja dokaza: težji del, da iz konveksnosti Γ sledi

$$\forall \lambda, \mu \geq 0 \;:\; (\; \lambda\Gamma + \mu\Gamma \;\subseteq\; (\lambda+\mu)\Gamma \;)$$

uženemo s konstrukcijo presečišča w daljic $[0, \lambda u + \mu v]$ in $[u, v]$ za poljubna $u, v \in \Gamma$. w se namreč za linearno neodvisna u in v izraža kot

$$w = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}u + \frac{\mu}{\lambda+\mu}v$$

torej je w v resnici poljuben element množice $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Gamma + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\Gamma$, zaradi $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$ in zaradi konveksnosti Γ pa je tudi element Γ.
Preostanek dokaza je trivialen in ga prepuščava bralcu.

2.4 Funkcija P je konveksna, ni pa strogo konveksna na $\mathbb{R}^3$. Hessova matrika je v vseh točkah $\mathbb{R}^3$ pozitivno semidefinitna.

2.5 Da, f je celo strogo konveksna na $\mathbb{R}^2$.

2.6 Funkcija f ni niti konveksna, niti konkavna.
Utemeljitev: Hessova matrika funkcije f je

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

in je neodvisna v vseh točkah prostora $\mathbb{R}^3$ enaka. Vodilne poddeterminante so po vrsti 4, 7 in -44. Hessova matrika je tako indefinitna, funkcija pa zato ni niti konveksna niti konkavna.

2.7 f je strogo konveksna na $\mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{f(x,y)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{f(x,y)}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f^2(x,y)-x^2}{f^3(x,y)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{f^3(x,y)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f^2(x,y)-y^2}{f^3(x,y)}$
Uporabimo Sylvestrov izrek:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1+y^2}{f^3(x,y)} > 0$ in
$\mathrm{Det}(H_f(x,y)) = \frac{1}{f^4(x,y)} > 0$

torej je f strogo konveksna na vsem $\mathbb{R}^2$.

2.8 f je konkavna, toda ni strogo konkavna. f ni konveksna.

2.9 f **je konveksna** na A. Pri dokazu si lahko pomagamo s Hessovo matriko in Sylvestrovim izrekom.

2.10 Zapišemo $f = g + h$, kjer sta

$$\begin{aligned} g(x,y) &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ h(x,y) &= -\ln(xy) \end{aligned}$$

g in h sta strogo konveksni, v kar se lahko prepričamo na primer z uporabo Hessove matrike in Sylvestrovega izreka, torej je tudi f strogo konveksna funkcija.

2.11 Da. Uporabimo izrek o (strogi) konveksnoti kompozituma $F = f \circ g$ (strogo) konveksnih funkcij f in g, kjer je f naraščajoča funkcija, ter dejstev, da je funkcija $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (strogo) konveksna na $\mathbb{R}^3$ (kar lahko opreverimo z uporabo Sylvestrovega izreka).

2.13 Označimo $g := -Q$, g je torej konveksna funkcija na $\mathbb{R}^n$.

a) $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < 0\}$ in je konveksna množica po nekoliko spremenjenem izreku o plasteh:

spremenjeni izrek o plasteh: Naj bo $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija in $c \in \mathbb{R}$. Tedaj je $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) < c\}$ konveksna množica.

Dokaz: Naj bo $x, y \in A$ in $\lambda \in (0,1)$. Tedaj je

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) < \lambda c + (1-\lambda)c = c$$

$\mathcal{Q.E.D}$

b) Zapišemo $P = f \circ g$, kjer je
$f : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^{-1}$ konveksna in naraščajoča, torej je $f \circ g = \frac{1}{Q}$ konveksna funkcija po izreku o konveksnosti kompozituma konveksne in naraščajoče funkcije s konveksno funkcijo.

2.15 Naj bo v notranji točki x konveksne množice Φ globalni maksimum funkcije f. Ker je f na Φ nekonstantna, obstaja taka točka $y \in \Phi$, da je $f(y) < f(x)$. Oglejmo si, kaj je z vrednostjo funkcije f v točki $z = (1-(1+\delta))y + (1+\delta)x = x + \delta(x-y)$.
$z \in \Phi$, kar nam zagotavlja lema iz namiga k nalogi. Ker tedaj zaradi $\delta > 0$ točka x leži v notranjosti daljice $[y,z]$, jo lahko izrazimo kot konveksno linearno kombinacijo krajišč $x = \mu y + (1-\mu)z$, kjer je $\mu = \frac{\delta}{1+\delta} \in (0,1)$. Zato je zaradi konveksnosti funkcije f $f(x) \leq \mu f(y) + (1-\mu)f(z)$. Ker je po predpostavki $f(y) < f(x)$ in $f(z) \leq f(x)$, odtod sledi $f(x) < f(x)$, kar je protislovje.
Vzrok protislovja je bila predpostavka, da je v notranji točki konveksne množice dosežen globalni maksimum na Φ nekonstantne konveksne funkcije f.
$\mathcal{Q.E.D}$.

Slika 35: Slika **2.19**

2.17 Glavni poddeterminanti Hessove matrike sta 2 in $12 - a^2$. Prva je vedno (strogo) pozitivna, druga pa je (strogo) pozitivna za vrednosti parametra a (strogo) med $-2\sqrt{3}$ in $2\sqrt{3}$. Po Sylvestrovem izreku je torej pri teh vrednostih parametra a funkcija P (strogo) konveksna na $\mathbb{R}^2$.

2.18 f je dvakrat zvezno odvedljiva, zato zanjo pride v poštev kriterij pozitivne semidefinitnosti Hessove natrike

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}$$

ki je enaka za vse vrednosti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Glavni poddeterminanti sta $2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ in $4ac - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4ac \geq b^2$. Skupaj torej lahk o pogoj zapišemo simetrično v a in c kot

$$a, c \geq 0, \quad 4ac \geq b^2$$

2.19 Funkcija P je konveksna za tiste vrednosti parametrov a in b, pri katerih je Hessova matrika pozitivno semidefinitna za vse pare $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Po Sylvestrovem izreku je to tedaj, ko sta obe glavni poddeterminanti nenegativni, torej
$D_1 = a(a-1)x^{a-2}y^b \geq 0$, odtod $a \leq 0$ ali $a \geq 1$ in hkrati
$D_2 = (ab(a-1)(b-1) - a^2b^2)x^{2a-2}y^{2b-2} \geq 0$.
Ob upoštevanju nenegativnosti x in y dobimo tri območja v ravnini (a,b), prikazana na sliki 35.

2.20 $a, b, c > 1$. Pomagamo si s Hessovo matriko funkcije f.

2.21 $x \geq 0$

2.22 **Da**. Utemeljitev: označimo množico, katere konveksnost je potrebno ugotoviti z A, nato pa jo zapišimo kot presek dveh, kot se bo pokazalo kasneje konveksnih, množic

$$\begin{aligned} B &:= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq x^2 \} \\ C &:= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leq 6 \} \\ A &= B \cap C \end{aligned}$$

Če sedaj označimo

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 - y \quad \text{in} \\ g(x, y, z) &= x + y + z \end{aligned}$$

lahko B in C zapišemo kot plasti glede na f in g

$$\begin{aligned} B &:= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) \leq 0\ \} \\ C &:= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) \leq 6\ \} \end{aligned}$$

f je konveksna funkcija na $\mathbb{R}^3$, saj je vsota konveksnih funkcij x^2 in $-y$, torej je po izreku o plasteh B konveksna množica. Tudi g je konveksna funkcija na $\mathbb{R}^3$, saj je linearna, torej je po istem izreku C konveksna množica. Presek konveksnih množic pa je po izreku konveksna množica.

2.23 Φ je presek konveksnih množic A in B, kjer je

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ e^x \leq y\ \}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 16\ \}$$

Če definiramo $f(x,y) = e^x - y$, lahko zapišemo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) \leq 0\ \}$$

Ker je f konveksna funkcija na $\mathbb{R}^2$, je A konveksna množica. Podoben sklep lahko naredimo tudi za B. Odtod sledi, da je Φ konveksna.

2.24 Definiramo funkciji $h(\underline{x}) = ||\underline{x}||^2$ in $g(r) = -\sqrt{1-r}$. Ker je h konveksna, g pa konveksna in nepadajoča, je $g \circ h$ konveksna. Toda $f = -g \circ h$, zato je konkavna.

2.25 Pomagamo si s Hessovo matriko funkcije f:

$$H_f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

2.26 Pokazati je treba ekvivalentnost trditev (1) in (2):

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

(2) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n \ \forall \mu \in [0,1] \ : \ f(\mu u + (1-\mu)v) \leq \mu f(u) + (1-\mu) f(v)$

V ta namen pokažimo najprej, da iz (1) sledi (2):

$$\begin{aligned} & f(\mu u + (1-\mu)v) \leq && \text{/upoštevamo subaditivnost/} \\ \leq \ & f(\mu u) + f((1-\mu)v) = && \text{/upoštevamo homogenost/} \\ = \ & \mu f(u) + (1-\mu) f(v) \end{aligned}$$

nato pa še , da tudi iz (2) sledi (1):
izberimo $\mu = \frac{1}{2}$, $u = 2x$, $v = 2y$ oziroma $x = \mu u$ in $y = (1-\mu)v$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(\mu u + (1-\mu)v) \leq && \text{/upoštevamo konveksnost/} \\ &\leq \mu f(u) + (1-\mu) f(v) = \\ &= \tfrac{1}{2} f(2x) + \tfrac{1}{2} f(2y) = && \text{/upoštevamo homogenost/} \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$\mathcal{Q.E.D.}$

2.27 Pri dokazu si pomagamo z naslednjo lemo:

Lema: Naj bo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija in $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linearna preslikava. Tedaj je $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

Opomba: tedaj je g podana s predpisom $g(t) = t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ za neka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz: $(f \circ g)(\mu s + (1-\mu)t) \;=\; f(\mu s\boldsymbol{x} + (1-\mu)t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \;=$
$f(\mu(s\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (1-\mu)(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) \;\leq\; \mu f(s\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (1-\mu)f(t\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \;=$
$\mu(f \circ g)(s) + (1-\mu)(f \circ g)(t)$
Ker to velja za poljubna $s, t \in \mathbb{R}$ in $\mu \in [0,1]$, je $f \circ g$ konveksna.
Dokažimo sedaj najprej $(\Rightarrow)$.
dana $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$; tedaj zapišemo $F = f \circ g$, kjer je

$$g(\lambda) \;=\; \lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \;=\; \lambda(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$$

Ker je tako definirana g linearna, f pa je konveksna po predpostavki, nam pravkar dokazana lema zagotavlja, da je tudi F konveksna.
Opravimo še dokaz v obratni smeri $(\Leftarrow)$.
Če f ni konveksna, tedaj obstaja tak par vektorjev $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^n$ in tako število $lambda' \in [0,1]$, da velja

$$f(\lambda'\boldsymbol{x}' + (1-\lambda')\boldsymbol{y}) \;>\; \lambda' f(\boldsymbol{x}') + (1-\lambda')f(\boldsymbol{y})$$

Toda leva stran neenačbe je enaka $F(\lambda')$, desna pa $\lambda' F(1) + (1-\lambda')F(0)$, torej F ni konveksna na $[0,1]$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da je F konveksna na $\mathbb{R}$. Zato mora biti f konveksna.

2.28 Preverimo negativno semidefinitnost Hessove matrike funkcije f (ali pa pozitivno semidefinitnost funkcije $-f$) na množicah A oziroma B.

$$H_f(x,y) \;=\; \begin{bmatrix} 8(y - 3x^2) & 8x \\ 8x & -4 \end{bmatrix}$$

Da naj bo f konkavna na konveksni množici X, mora biti $(y - 3x^2) \leq 0$ in $\det(H_f(x,y)) = 32(x^2 - y) \geq 0$ na vsej X.

a) $X \;=\; A$: za $(0, \frac{1}{2}) \in A$ je $8(y - 3x^2) = 4$ kar ni ≤ 0, torej f **ni** konkavna na A.

b) Konveksna $X \;\subset\; B$: ker je na vsem B $x^2 \geq y$ oziroma drugače zapisano $y - x^2 \leq 0$ in je $x^2 \geq 0$, je $8(y - 3x^2) \leq 8(y - x^2) \leq 0$. Podobno je tudi $32(x^2 - y) \geq 0$, torej **je** f konkavna na vsaki konveksni podmnožici $X \subset B$.

2.3 Prirejene in dualne naloge

3.1

a) $P(x) = \sup_{y\in\Psi} G(x,y) = \max\{\sin(x^2+xy) \mid y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$. Upoštevamo naslednji sklep:

$h_x(y) = G(x,y) = \sin(x^2+xy)$ je za $x>0$ naraščajoča, za $x<0$ pa padajoča funkcija y, če le $(x^2+xy) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kar pa je v našem primeru izpolnjeno, saj $x, y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x^2+xy < \frac{\pi}{2}$. Podobno sklepanje nas pripelje do sklepa $\cos(x^2+xy) > 0$ na $\Phi \times \Psi$.

Odtod sklepamo, da je maksimum h za $x>0$ dosežen v desnem, za $x<0$ pa v levem krajišču intervala $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$:

$$y^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : x > 0, \\ \text{karkoli} & : x = 0, \\ -\frac{1}{4} & : x < 0 \end{cases} \implies P(x) = G(x, y^*(x)) = \sin\left(x^2 + \frac{|x|}{4}\right)$$

$Q(y) = \inf_{x\in\Phi} G(x,y) = \min\{\sin(x^2+xy) \mid x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$. Upoštevamo naslednji sklep:

$g_y(x) = G(x,y) = \sin(x^2+xy)$ ima minimum v stacionarni točki:
$0 = \frac{d}{dx}\sin(x^2+xy) = (2x+y)\cos(x^2+xy) \implies x = -\frac{1}{2}y$
$\frac{d^2}{x^2}\sin(x^2+xy) = 2\cos(x^2+xy) - (2x+y)^2\sin(x^2+xy)$
$\frac{d^2}{x^2}\sin(x^2+xy)|_{x=-\frac{1}{2}y} = 2\cos(-\frac{y^2}{4}) - 0 > 0$
torej je stacionarna točka minimum. Odtod

$$x^*(y) = -\frac{1}{2}y \implies Q(y) = G(x^*(y), y) = -\sin\left(\frac{y^2}{4}\right)$$

b) Naslonimo se na *izrek o minimaksu*
$\min P\ :\ x^* = 0 \to y^* = \text{karkoli};\ P^* = 0$
$\max Q\ :\ y^* = 0 \to x^* = 0;\ Q^* = 0 = P^*$
Minimax sedelna točka je torej $(0,0)$, prirejeni nalogi **sta dualni**.

c) $P_1(x) = \inf_{y\in\Psi} G(x,y) = \min\{\sin(x^2+xy) \mid y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$. Upoštevamo sklep za P iz prejšnje točke naloge.

$$y^*(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & : x > 0, \\ \text{karkoli} & : x = 0, \\ \frac{1}{4} & : x < 0 \end{cases} \implies P_1(x) = G(x, y^*(x)) = \sin\left(x^2 - \frac{|x|}{4}\right)$$

$Q_1(y) = \sup_{x\in\Phi} G(x,y) = \max\{\sin(x^2+xy) \mid x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$. Upoštevamo sklep za Q iz prejšnje naloge. Ker je stacionarna točka minimum, mora biti maksimum dosežen na robu:

$$x^*(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : y > 0, \\ \pm\frac{1}{4} & : y = 0, \\ -\frac{1}{4} & : y < 0 \end{cases} \implies Q_1(y) = G(x^*(y), y) = \sin\left(\frac{1}{16} + \frac{|y|}{4}\right)$$

Najprej poiščemo maximum P_1, ki ni zvezno odvedljiva v 0:
$P_1(0) = 0$

$x > 0\ :\quad 0 = P_1'(x) = (2x - \frac{1}{4})\cos(x^2 - \frac{x}{4})\ Rightarrow\ x_1 = \frac{1}{8},\ P(x_1) = -\frac{1}{64} < 0 = P(\frac{1}{4})$
$x < 0\ :\ P_1$ je soda funkcija $Rightarrow\ x_2 = -\frac{1}{8},\ P(x_2) = -\frac{1}{64} < 0 = P(\frac{1}{4})$
$x^* \in \{0, \pm\frac{1}{4}\}\ \rightarrow\ y^* \in \{0, \pm\frac{1}{4}\};\ P^* = 0$
$\min Q\ :\ y^* = 0\ \rightarrow\ x^*$ je karkoli; $Q^* = \sin\left(\frac{1}{16}\right) \neq P^*$
Uporabimo izrek o maximinu. Ker maximin sedelne točke ni, prirejeni nalogi **nista dualni**.

3.2

a)

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \begin{cases} \frac{15}{2}x^2 - 5x + 1 & : \text{ za } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x^2 + x - 1 & : \text{ za } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases} \\
Q(y) &= \begin{cases} -5y^2 + 5y - \frac{13}{12} & : \text{ za } 0 \leq y \leq \frac{5}{6}, \\ -2y^2 + 1 & : \text{ za } \frac{5}{6} < y \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Da. Naloga ima namreč sedelno točko $x^* = \frac{1}{3},\ y^* = \frac{1}{2}$.

3.5 Prirejena naloga je $(\mathbb{R}, Q, \text{Max})$, kjer je

$$
Q(u) = \begin{cases} 5u & \text{za } |u| \leq 1 \\ \infty & \text{za } |u| \geq 1 \end{cases}
$$

2.4 Nelinearne zvezne optimizacijske naloge

4.1 F je vsota kvadratov, torej navzdol omejena z vrednostjo 0, to vrednost pa doseže v točki, ko so hkrati vsi kvadrirani deli enaki 0, če seveda taka točka obstaja. V tem primeru imamo srečo, saj obstaja:

$$z^* = \frac{1}{2}, \quad y^* = \frac{3}{4}, \quad x^* = \frac{3}{8}$$

F je navzgor neomejena, zato nima maksimuma.
Drugih lokalnih ekstremov F nima, v kar se najlažje prepričamo, če z linearno transformacijo uvedemo nove koordinate u, v, w, v katerih se F izraža kot $u^2 + v^2 + w^2$, ki ima edino stacionarno točko v izhodišču in za katero ni težko pokazati, da je konveksna na $\mathbb{R}^3$.

4.2 Globalne minimume zvezno odvedljive funkcije na odprti množici iščemo med stacionarnimi točkami, torej med točkami, v katerih so vsi parcialni odvodi funkcije enaki 0:

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} = 4x^3 - 4y \implies y = x^3$$
$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} = -4x + 4y^3 \implies x = y^3$$

ODtod $x = x^9 \in \mathbb{R}$ kar je možno le za $x = 0$ ali $x = 1$. Kandidata za globalni minimum sta torej točki

$$T_1 = (0,0) \quad \text{in} \quad T_2 = (1,1)$$

Izračunati moramo še druge parcialne odvode P:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -4, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 12y^2$$

Hessova matrika funkcije P v točki T_2 je pozitivno definitna, zato je T_2 lokalni minimum. $P(T_2) = -2 < 0 = P(T_1)$, zato T_1 ni globalni minimum.

Ker P ni konveksna na vsem $\mathbb{R}^2$, lokalni minimum še ni nujno tudi globalni. V splošnem bi namreč lahko šla vrednost funkcije P tudi proti neki vrednosti manjši od -2 (ali pa celo proti $-\infty$) ko bi se oddaljevali od izhodišča. Vendar je vrednost funkcije P navzdol omejena z -2. To lahko preverimo na več načinov. Eden od njih je naslednji:

oglejmo si vrednost P na krožnici $x^2 + y^2 = 1$. V parametrični obliki lahko zapišemo $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Tedaj je $P = \cos^4\varphi - 2\sin 2\varphi + \sin^4\Phi$, kar je očitno večje ali kvečjemu enako številu -2. V notranjosti kroga z radijem 1 je edina stacionarna točka T_1, v kateri pa je vrednost funkcije P večja od -2, zato na omenjenem krogu P doseže minimum na robu v že znani točki T_2.

V zunanjosti kroga z radijem 1 uporabimo polarne koordinate. Tedaj je $P = r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) - 2r^2\sin 2\varphi > r^2(\cos^4\varphi - 2\sin 2\varphi + \sin^4\Phi) > 1 * (-2)$.

4.3

$$\begin{array}{rcll} \text{Max} & = & \{\, (0,-2,0),\ (0,2,0) \,\} & ,\ \max = 4 \\ \text{Min} & = & \left\{\, (-\sqrt{2},0,\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},0,-\sqrt{2}) \,\right\} & ,\ \min = -2 \end{array}$$

Pri reševanju si pomagamo z Lagrangevim multiplikatorjem.

4.4 P doseže minimum v enem od presečišč krožnice s parabolo:

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad y = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}}$$

4.5 Območje Φ je konveksno zaprtje prirezanega rotacijskega paraboloida, katerega os je z os koordinatnega sistema, vrh pa je v izhodišču.
Območje je zaprto in omejeno ter ima neprazno notranjost, torej reševanje naloge lahko temeljimo na izreku Kuhn–Tucker. Rešiti moramo dve nalogi (Φ, g, Min) in $(\Phi, g, \mathrm{Max}) \simeq (\Phi, -g, \mathrm{Min})$, ki ju zaradi simetrije lahko rešujemo sproti. V ta namen vpeljemo *dodatni spremenljivki* u in v ter zapišemo Lagrangevo funkcijo za prvo nalogo:

$$L(x,y,z;u,v) = x+y+z + u(x^2+y^2-z) + v(z-1)$$

Lagrangeva funkcija za drugo nalogo je tedaj

$$L_1(x,y,z;u_1,v_1) = -(x+y+z) + u_1(x^2+y^2-z) + v_1(z-1)$$

Če vpeljemo zvezo $u = -u_1$ in $v = -v_1$, je $L_1 = -L$. Vseh pet enačb in dve neenačbi Kuhn–Tuckerjevega sistema za drugo nalogo je torej enakih kot pri prvi nalogi, *umetni spremenljivki* pa spremenita predznak. Med rešitvami Kuhn–Tuckerjevega sistema, v katerih bosta *dodatni spremenljivki* $u, v \geq 0$ bomo tako iskali rešitve prve naloge, pri rešitvah, v katerih sta $u, v \leq 0$ pa bomo iskali rešitve druge naloge.
Zapišimo sedaj Kuhn–Tuckerjev sistem za obe nalogi:

$$\begin{array}{rcl} 0 = L_x & = & 1+2ux \\ 0 = L_y & = & 1+2uy \\ 0 = L_z & = & 1-u+v \\ u(x^2+y^2-z) & = & 0 \\ v(z-1) & = & 0 \\ x^2+y^2-z & \leq & 0 \\ z-1 & \leq & 0 \\ u,v & \geq & 0 \text{ za min} \\ u,v & \leq & 0 \text{ za max} \end{array}$$

Sistem rešujemo postopoma tako, da pregledamo vse štiri možne kombinacije (ne)ničelnosti *dodatnih spremenljivk*:

1. **notranjost** Φ $(u = v = 0)$: dobimo protisloven sistem, ki nima rešitve, torej v notranjosti Φ ni stacionarnih točk;

2. **vrhnji disk** $(u = 0, v \neq 0)$: dobimo protisloven sistem, ki nima rešitve, torej tudi na vrhnjem disku ni stacionarnih točk;

3. **prirezan paraboloid** $(u \neq 0, v = 0)$: točka $x_1 = y_1 = -\frac{1}{2}$, $z_1 = \frac{1}{2}$, $g(x_1,y_1,z_1) = -\frac{1}{2}$ ter $u = 1$ je torej kandidat za globalni minimum;

4. **krožnica** $(u \neq 0 \neq v)$: točki $x_2 = y_2 = -u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v_2 = -1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(x_2,y_2,z_2) = 1+\sqrt{2}$, ki je kandidat za globalni maksimum, ter $x_3 = y_3 = -u_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $v_3 = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(x_3,y_3,z_3) = 1-\sqrt{2}$, ki je drugi kandidat za globalni maksimum, vendar ne pride v poštev, ker je v njem dosežena manjša vrednost g kot v prvem kandidatu.

Globalni minimum torej g doseže v točki $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in znaša $-\frac{1}{2}$, globalni maksimum pa v točki $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ in znaša $1+\sqrt{2}$.

4.7 $x^* = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}},\ \ y^* = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}},\ \ P^* = 6 - 2\sqrt{5}.$

4.8 Minimum lahko izračunamo z uporabo izreka Kuhn-Tucker:

$$x^* \ = \ y^* \ = \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ P^* \ \simeq \ -1.4142$$

Dosežen je na krožnici.

4.10 $x^* = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ y^* = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ P^* = 4\sqrt{3}$

4.11 $x^* = \frac{1}{2},\ \ y^* = -\frac{1}{4},\ \ P^* = -\frac{3}{4}$

4.12 Rešitev je $x^* = 8 - 4\sqrt{2},\quad y^* = 8(\sqrt{2}-1),\quad P^* = \frac{3+2\sqrt{2}}{8}$ in leži na hipotenuzi pravokotnega trikotnika Φ.

4.13 Ker je P linearna funkcija, doseže minimum na robu zaprte in omejene množice Φ. Poiščemo točke, v katerih se nivojnica kriterijske funkcije P

$$y \ = \ \frac{C-3x}{4}$$

z najmanjšo vrednostjo C dotika množice Φ. Taka točka je bodisi presečišče po dveh gladkih krivulj, ki omejujejo Φ, bodisi ima v njej tangenta na Φ smerni koeficient nivojnice, torej $\frac{-3}{4}$.
Rešitev

$$\min(\Phi, P) \ = \ 4\sqrt{3}, \ \ \mathrm{Min}(\Phi, P) \ = \ \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

je leži na hiperboli $xy = 1$.

4.14 $x^* = -1,\ \ y^* = 3,\ \ P^* = 5$

4.15 Minimum

$$x^* = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \ y^* = -\frac{2}{\sqrt{13}},\ \ P^* = 4 - \sqrt{13}$$

je dosežen na krožnici $x^2+y^2 = 1$, najlaže pa ga poiščemo grafično. Kriterijska funkcija je namreč linearna, torej so nivojnice premice s smernim koeficientom $\frac{3}{2}$. Poiskati je treba parametyrični zapis krožnice s parametrom x oblike $y = f(x)$ in rešiti enačbo $f'(x) = \frac{3}{2}$.

4.16 $x_1 = -3,\ y_1 = -2,\ P_1 = -3$ in $x_2 = \sqrt{13},\ y_2 = 0,\ P_2 = \sqrt{13}.$

4.17 $x^* = 1,\ y^*3,\ P^* = 6$

4.18 $x^* = \frac{13}{17},\ \ y^* = \frac{18}{17}$

4.19 $x^* = \frac{4}{3},\ y^* = \frac{2}{3},\ P^* = -\frac{64}{9}$

4.21 Konveksna funkcija P ima na $\mathbb{R}^2$ globalni minimum v izhodišču koordinatnega sistema. Ker $(0,0) \in \Phi$, je rešitev naloge.

4.22 Območje Φ je trikotnik z vrhovi

$$\begin{array}{ll} T_1 & (5,5) \\ T_2 & (1,3) \\ T_3 & (9,1) \end{array}$$

Uženemo jo tako, da poiščemo kandidate za globalni minimum med:
– stacionarnimi točkami P v notranjosti trikotnika,
– stacionarnimi točkami zožitev P na nosilke stranic in
– vrhovi trikotnika.
V notranjosti ni stacionarnih točk, ker je $\frac{\partial P}{\partial y} = -4 \neq 0$.
na robovih :
a) $(x + y = 10) : P|_{x+y=10} = P(x, 10 - x) = -x^2 + 5x - 40$. Parabola, graf kvadratne funkcije z vodilnim koeficientom manjšim od 0, ima v edini stacionarni točki maximum, torej ni kandidat za minimum.
b) $(-x + 2y = 5) : P|_{-x+2y=5} = P(2y - 5, y) = -4y^2 + ...$ Velja enak sklep, kot pri točki a).
c) $(x + 4y = 13) : P|_{x+4y=13} = P(13 - 4y, y) = -16y^2 + ...$ Velja enak sklep, kot pri točkah a) in b).

v vrhovih : minimum je torej dosežen v katerem od vrhov. Izkaže se, je to T_3, kjer P doseže vrednost -76.

4.23

$$x^* = 0, \quad y^* = 2, \quad P^* = -2$$

Minimum P je dosežen v ogljišču enakokrakega trapeza Φ.

4.24 Območje Φ je trikotnik, torej omejena in zaprta množica, kriterijska funkcija P pa je zvezna na Φ, torej na Φ doseže minimum in maksimum. Kandidate za ekstremne točke iščemo med stacionarnimi točkami v notranjosti Φ, stacionarnimi točkami zožitev P na gladke odseke roba Φ (v našem primeru so to stranice trikotnika) in točkami, v katerih rob območja ni gladek (v našem primeru so to ogljišča trikotnika).

vrsta	točka	P
notranjost Φ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{64}$
stranice Φ	$(\frac{16}{3}, \frac{8}{3})$	$-\frac{7*2^{11}}{27} \simeq -531$
ogljišča Φ	$(0,0)$	0
	$(8,0)$	0
	$(0,8)$	0

Odtod:

$$\begin{array}{lcllcl} \max(\Phi, P) & = & \frac{1}{64}, & \mathrm{Max}(\Phi, P) & = & \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)\right\}, \\ \min(\Phi, P) & = & -\frac{14336}{27}, & \mathrm{Min}(\Phi, P) & = & \left\{\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)\right\} \end{array}$$

4.25 $\boldsymbol{x}^* = (2, \sqrt{5}), \quad P^* = 42$

4.27 $x^* = (2,1)$

4.28 $\mathrm{Min}(\Phi, P) = \{\, (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}),\ (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \,\}, \quad \min(\Phi, P) = -\frac{4}{27}$

4.30 $(0,0,0)$, $Q^* = 0$

4.31 Najenostavneje je iz druge enačbe izraziti $z = 6 - y$, nato pa poiskati minimum funkcije dveh spremenljivk

$$Q(x,y) = P(x,y,6-y) = x^2 + y^2 + 4x - 10y + 34$$

na hiperboli $x^2 + 4xy + y^2 = 1$.
Z metodo Lagrangevega multiplikatorja določimo kandidate za lokalne ekstreme v presečiščih omenjene hiperbole s hiperbolo $2x^2 - 2y^2 + 9x + 12y = 0$. Rešiti je torej treba enačbo četrte stopnje.

4.32 Hessova matrika funkcije P je

$$H_P(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

in je (strogo) pozitivno definitna matrika, torej je P strogo konveksna na $\mathbb{R}^2$. Na $\mathbb{R}^2$ tako P doseže globalni minimum v edini stacionarni točki

$$x^* = 1, \quad y^* = \frac{1}{2}, \quad P^* = -2$$

(Globalni minimum P na $\mathbb{R}^2$ še lažje poiščemo tako, da drugače zapišemo $P(x,y) = 4(y - \frac{1}{2})^2 + (x-1)^2 - 2$.)
Ker dobljena točka leži v območju, $(1, \frac{1}{2}) \in \Phi$, je seveda tudi globalni minimum P na Φ.

4.33 Nalogo lahko rešimo grafično. Slika 36 prikazuje območje Φ. Plastnice P so koncentrične krožnice s središčem v točki $(2,1)$, vrednost P pa je kvadrat razdalje od omenjene točke. Med krožnicami omenjene družine ščemo torej tisto z največjim radijem, ki še vsebuje kako točko iz Φ. Z drugimi besedami, iščemo tisto robno točko omočja Φ, ki je od točke $(2,1)$ najbolj oddaljena. Taka točka ne more ležati v notranjosti nobene od robnih daljic, saj je od neke točke vedno najbolj oddaljeno kako krajišče daljice. Podobno lahko iz slike brez podrobnega utemeljevanja zaključimo, da je zaradi vbočenosti preostalega dela robu iskana točka ponovno lahko le katera od krajišč. Izračunamo vsa štiri krajišča oziroma "vrhove" območja Φ ter njihovo razdaljo do točke $(2,1)$:

i	T_i	$P(T_i)$
1	$(0,0)$	5
2	$(0,1)$	4
3	$\left(2\sqrt{\frac{5}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$	$\frac{17-8\sqrt{3}}{3}$
4	$\left(\sqrt{6}, 0\right)$	$< P(T_1)$

Slika 36: Območje **4.33**

Maksimum je torej dosežen v točki $(0,0)$ in znaša 5.

4.34 $(x^*, y^*) = (\frac{8}{5}, \frac{12}{5})$

4.36

$$x^* = \left(\frac{4C}{3B}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2B}{A}\right)^{\frac{7}{15}}, \quad y^* = \left(\frac{4C}{3B}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2B}{A}\right)^{\frac{2}{15}}, \quad P^* = 15 \left(\frac{A}{8}\right)^{\frac{8}{15}} \left(\frac{B}{4}\right)^{\frac{4}{15}} \left(\frac{C}{3}\right)^{\frac{3}{15}}$$

4.37 Definiramo novi neznanki $u = e^x$ in $v = e^y$ ter novo kriterijsko funkcijo $Q(u,v) = \frac{1}{uv}$, ki ustreza P. Območju Φ ustreza $\Psi = \{(u,v) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid u \geq 1, u+v \leq 20\}$. Nalogi (Φ, P, Min) in (Ψ, Q, Min) sta enakovredni. Rešimo drugo nalogo in odtod razberemo rešitev prvotne naloge: $x^* = y^* = \ln 10$, $P^* = \frac{1}{100}$.

4.38 $x^* = 10, \quad y^* = w^* = 0, \quad z^* = 8, \quad P^* = 300$

4.39 $x^* = y^* = \frac{1}{2}, \quad P^* = 8$.
Ko se približujemo koordinatnima osema, raste vrednost funkcije prek vsake meje, enako ko se kakorkoli oddaljujemo v neskončnost. V polarni obliki namreč P zapišemo kot

$$4r\cos\varphi \; + \; \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \; + \; 4\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Ekstreme iščemo torej med stacionarnimi točkami v notranjosti.

4.40 Φ je zaprta in omejena množica, P pa zvezna funkcija, torej doseže na Φ globalni minimum in maksimum. Φ je oblike kvadrata. Kandidati za globalna minimum in maksimum so treh vrst.

- Stacionarne točke v notranjosti Φ:

$$\begin{array}{rcl} 0 = \frac{\partial P}{\partial x} & = & 6x^2 + y^2 + 10x \\ 0 = \frac{\partial P}{\partial y} & = & 2y(x+1) \qquad \Longrightarrow \quad y = 0 \ \text{ali} \ x = -1 \end{array}$$

x	y	$P(x,y)$
0	0	0
$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{125}{27} \simeq 4.63$
-1	-2	3
-1	2	3

- Stacionarne točke zožitve P na stranice kvadrata:
  - $(x+y=4)$: $P_1(x) = P(x, 4-x) = 3x^3 - 2x^2 + 8x + 16$
    $0 = P_1'(x) = 9x^2 - 4x + 8$ nima rešitve;
  - $(x-y=4)$: $P_2(x) = P(x, x-4) = P_1(x)$, saj je $(x-4)2 = (4-x)^2$, torej tudi P_2 nima stacionarnih točk;
  - $(x-y=-4)$: $P_3(x) = P(x, x+4) = 3x^3 + 14x^2 + 24x + 16$
    $0 = P_3'(x) = 9x^2 + 28x + 24$ nima rešitve;
  - $(x+y=-4)$: $P_4(x) = P(x, -x-4) = P_3(x)$, saj je $(-x-4)2 = (4+x)^2$, torej tudi P_4 nima stacionarnih točk.
- Vogali kvadrata:

x	y	$P(x,y)$
0	4	16
0	-4	16
-4	0	-48
4	0	208

Kandidatov za globalna ekstrema je končno mnogo. Med njimi se odločimo za tiste, pri katerih P doseže najvišjo oziroma najnižjo vrednost. To sta vogala $(-4, 0)$, kjer P doseže vrednost 208, ter $(4, 0)$, kjer P doseže vrednost -48.

4.41 Minimum je dosežen na robu območja v točki $(43.2085, 0.12725...) \in \Phi$, kjer je dosežena vrednost $P^* = 493.7143...$
Enostavno je pokazati, da v notranjosti Φ ni stacionarnih točk ter da gre vrednost kriterijske funkcije P proti $+\infty$ ko se približujemo delu roba Φ, ki ni v Φ (to je pozitivni poltrak osi x, daljica $(0,0)(0,\frac{1}{5})$, ter poltrak $(0,\frac{1}{5})(+\infty,\frac{1}{5})$.) Samo rešitev je z orodji, ki jih obravnava ta knjiga brez re"evanja enačbe četrte stopnje težko poiskati analitično na roko, zato si pomagamo z iteracijskimi postopki na zožitvi funkcije P na krivuljo $5y + \frac{2}{xy} = 1$, torej funkcije ene spremenljivke.

4.42

$$
\begin{array}{lcl}
L(\boldsymbol{x}, u) & = & \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \; + \; u\left(\sum x_i^2 - 1\right) \\
Q(u) & = & \inf|_{x \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, u) \; = \\
 & = & \sum_{i=1}^{n} \inf(\; |x_i - a_i| \; + \; u x_i^2 \;) \; - \; u \\
\inf_{x \in \mathbb{R}} (|x-a| + u(x^2-1)) & = & \begin{cases} -\infty & , \; u < 0 \\ 0 & , \; u = 0 \\ -\frac{1}{4u} - u + |a| & , \; u > 0 \end{cases} \\
Q(u) & = & \begin{cases} -\infty & , \; u < 0 \\ 0 & , \; u = 0 \\ -\frac{n}{4u} - nu + \sum |a_i| & , \; u > 0 \end{cases} \\
\max_{u \geq 0} Q(u) & = & \begin{cases} \sum a_i \; - \; n & , \; \sum |a_i| \geq n \quad \Longrightarrow \quad u^* = \frac{1}{2} \\ 0 & , \; \text{sicer} \quad \Longrightarrow \quad u^* = 0 \end{cases}
\end{array}
$$

$$P(\boldsymbol{x}^*) \;=\; Q(u^*) \qquad u^* \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; \boldsymbol{x}^* \;=\; \boldsymbol{a}^*$$

4.43

a) (Φ, P, Min) , kjer je
$\Phi \;=\; \{\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = D,\;\; x,y,z \geq 0 \;\}$ in
$P(x,y,z) \;=\; x^a y^b z^c$.

b) Rešujemo kot vezan ekstrem. Zapišemo Lagrangevo fonkcijo

$$L_{\alpha,\beta\gamma}(x,y,z;u) \;=\; x^a y^b z^c \;+\; u(\alpha x + \beta y + \gamma z - D)$$

Z odvajanjem po x, y in z dobimo sistem treh enačb

$$\begin{array}{rcl} ax^{a-1}y^bz^c \;+\; \alpha u & = & 0 \\ bx^ay^{b-1}z^c \;+\; \beta u & = & 0 \\ cx^ay^bz^{c-1} \;+\; \gamma u & = & 0 \end{array}$$

Prvo enačbo pomnožimo z x, drugo z y, tretjo z z, jih seštejemo ter pri tem upoštevamo $\alpha x + \beta y + \gamma z = D$. Dobimo

$$(a+b+c)\; x^a y^b z^c \;+\; uD$$

Odtod pridemo do rešitev

$$x^* \;=\; \frac{aD}{\alpha(a+b+c)} \qquad y^* \;=\; \frac{bD}{\beta(a+b+c)} \qquad z^* \;=\; \frac{cD}{\gamma(a+b+c)}$$

4.44

$$r^* \;=\; \sqrt[3]{\frac{dV}{2\pi c}},\;\; v^* \;=\; \sqrt[3]{\frac{Vc^2}{\pi d^2}},\;\; \mathrm{cena}^* \;=\; 3\sqrt[3]{2\pi c}\sqrt[3]{(dV)^2}$$

4.46

a) Energija i-tega stiska znaša

$$E_i \;=\; K\left(\sqrt{\frac{p_i}{p_{i-1}}} - 1\right)$$

Celotna energija treh stiskanj znaša

$$E \;=\; K\left(\sqrt{\frac{p_1}{p_0}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_3}{p_2}} - 3\right)$$

Za kriterijsko funkcijo torej lahko vzamemo kar

$$P(p_1,p_2) \;=\; \frac{E}{K} + 3 \;=\; \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{p_3}{p_2}} - 3$$

Omejitve: $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3$ oziroma

$$\Phi \;=\; \left\{(\;(p_1,p_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 \;\mid\; p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3\right\}$$

Nalogo torej lahko zapišemo kot optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min).

b) Iščemo minimum funkcije

$$f(x,y) \;=\; Ax^{\frac{1}{2}} \;+\; x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \;+\; By^{-\frac{1}{2}}$$

(kjer je $x = p_1,\ y = p_2,\ A = p_0^{-\frac{1}{2}},\ B = p_3^{\frac{1}{2}}$)
na trikotnem območju Φ.

Edina stacionarna točka P v notranjosti Φ je

$$\left(\sqrt[3]{p_0^2 p_3}, \sqrt[3]{p_0 p_3^2}\right), \quad P \;=\; 3\sqrt[6]{\frac{p_3}{p_0}} \;>\; 3$$

V ogljiščih (p_0, p_0), (p_0, p_3) in (p_3, p_3) je vrednost kriterijske funkcije $P = \sqrt{\frac{p_3}{p_0}} + 2$

Na stranicah trikotnika so stacionarne točke
$(p_0, \sqrt{p_0 p_3})$, $(\sqrt{p_0 p_3}, \sqrt{p_0 p_3})$ in $(\sqrt{p_0 p_3}, p_3)$, v vseh treh primerih pa je $P = 1 + 2\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}}$.

Pokazati je le še treba, da je

$$3\sqrt[6]{\frac{p_3}{p_0}} \;\le\; 1 + 2\sqrt[4]{\frac{p_3}{p_0}} \;\le\; 2 + \sqrt{\frac{p_3}{p_0}}$$

V tanamen zapišimo krajše $t = \frac{p_3}{p_0}$; $t \ge 1$. Pokazali bomo, da je

$$3\sqrt[6]{t} \;\le\; 1 + 2\sqrt[4]{t} \;\le\; 2 + \sqrt{t} \quad \text{za } t \in [1, +\infty)$$

Vse tri funkcije so zvezno odvedljive na $[1, +\infty)$.
v točki 1 imajo vse tri funkcije enako vrednost 3.
Odvodi funkcij so po vrsti
$\frac{1}{2}t^{-\frac{5}{6}} \;\le\; \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{4}} \;\le\; \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ za $t \ge 1$.
Zato neenakost velja.

Sklep: najmanj energije porabimo, če vmesna tlaka znašata

$$p_1 \;=\; \sqrt[3]{p_0^2 p_3} \ \text{ in } \ p_2 \;=\; \sqrt[3]{p_0 p_3^2}$$

2.5 Linearno programiranje

5.2 Maksimum $P^* = 90$ je dosežen na daljici $\overline{AB}$, kjer je $A = (0,5)$ in $B = (\frac{45}{23}, \frac{126}{23})$.

5.3 (Ψ, Q, Max)

$Q(u,v,w) = 4u + 7v + 3w$
$\Psi = \{ (u,v,w) \in \mathcal{R}^3 \mid u + 3v + w \le 2, 3u + 5v + w \le 5,$
$u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0 \}$

5.4 $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{19}{13}, 0, \frac{11}{13}\right)$, $P^* = \frac{115}{13}$

5.5 $x^* = 1,\ y^* = 10,\ z^* = 0,\ P^* = -88$

5.6 $P^* = 6,\ (x,y,z,s_1,s_2) = (0,0,2,0,3)$

5.7 $x^* = 5,\ y^* = 0,\ z^* = 0$

5.8 Grafično rešimo dualno nalogo (Ψ, Q, Max)

$$\begin{aligned} Q(u,v) &= u + v \\ \Phi &= \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2u + v \le 4,\ 3v \le 15, \\ &\qquad 3u + v \le 12,\ u - v \le 2,\ u,v \ge 0 \} \end{aligned}$$

V rešitvi $u^* = 0,\ v^* = 4,\ Q^* = 4$ so nezasičene vse neenačbe razen prve, zato so ustrezne neznanke v rešitvi prvotne naloge enake 0: $y^* = z^* = w^* = 0$. Po drugi strani pa je $P^* = Q^* = 4$, odtod izrazimo še $x^* = 4$.

5.9 $x^* = 1,\ y^* = 3,\ P^* = 59$

5.10 Uporaba metode *veliki M* nas pripelje do rezultata

$$\boldsymbol{x}^* = (5,0,0,0,5,10), \quad P^* = 20$$

5.11 $x_1^* = \frac{4}{5},\ y_1^* = \frac{3}{5},\ z_1^* = 0,\ P^* = 2$
pa tudi $x_2^* = 2,\ y_2^* = 0,\ z_2^* = 0.$

5.12 $x^* = 2,\ y^* = 4,\ P^* = 8$

5.13 $x^* = 0,\ y^* = 14,\ z^* = 9,\ P^* = -9$

5.14 $x^* = 0,\ y^* = 2,\ z^* = 5,\ P^* = 7.$

5.15
$x_1^* = \frac{21}{4},\ x_2^* = x_3^* = 0,\ x_4^* = \frac{5}{2},\ P^* = \frac{255}{2}$
Do rešitve najlaže pridemo z reševanjem dualnega LP.

5.16 Splošna rešitev naloge je
$x^* = (1-\lambda)\frac{56}{17},\ y^* = \lambda + (1-\lambda)\frac{45}{17} \qquad (0 \le \lambda \le 1),\ P^* = 6$

5.17 Nalogo elegantno rešimo tako, da izrazimo z iz enačbe, nato pa dobljeno nalogo LP rešujemo grafično. Rešitev:
$x^* = z^* = 0, \;\; y^* = 3, \;\; P^* = 18$

5.18 $x^* = z^* = 0, \;\; y^* = \frac{15}{4}, \;\; P^* = 15$. Izplača se reševati dualno nalogo.

5.19 Izkušeno oko reševalca nalog iz optimizacije takoj opazi, da je kriterijska funkcija večkratnik desne strani ene od neenačb. Ker je neenačba tipa $\leq$, naloga pa tipa max, avtomatično vsaka točka poliedra, ki v kateri je ta neenačba zasičena, reši nalogo (če seveda taka točka sploh obstaja). Neenačba določa ravnino v trorazsežnem prostoru. Rešitve torej sestavlja natanko robna ploskev konveksnega poliedra Φ, ki jo določa enačba $2x + 4y = 1$. Poiščemo ogljišča te ploskve:

$$\left(-\frac{3}{2}, -20, 1\right), \;\; \left(-\frac{3}{2}, 1, 1\right), \;\; \left(0, 1, \frac{1}{4}\right), \;\; \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \;\; \left(\frac{3}{94}, \frac{64}{94}, \frac{22}{94}\right)$$

Splošna rešitev naloge je konveksna kombinacija naštetih točk. V vseh teh točkah ima kriterijska funkcija vrednost 2.

5.20 $x^* = 20, \;\; y^* = z^* = 0, \;\; P^* = 40$
Iz enačbe izrazimo x, nato pa rešujemo grafično.

5.21 $x^* = 0, \;\; y^* = 40, \;\; z^* = 30, \;\; P^* = 100$
Rešujemo z osnovno metodo simpleksov.

5.22 P na Φ ni navzgor omejen.

5.23 LP ima več rešitev. Splošna rešitev
$x^* = \lambda\frac{4}{5} + 2(1-\lambda), \;\; y^* = \lambda\frac{9}{5}, \;\; z^* = 3(1-\lambda), \;\; (\lambda \in [0,1]), \;\; P^* = 7$
leži na daljici s krajiščema $(\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0)$ in $(2, 0, 3)$.

5.24 $x^* = z^* = 0, \;\; y^* = 4, \;\; P^* = -4$

5.25 $x^* = y^* = 0, \;\; z^* = 1, \;\; P^* = 1$

5.26 Uvedemo novo spremenljivko $y' = -y$ in tretjo neenačbo pomnožimo z -1, nato pa rešujemo dualni LP z osnovno metodo simpleksov. Iz rešitve slednjega razberemo
$x^* = -y^* = \frac{7}{2}, \;\; z^* = \frac{3}{2}, \;\; P^* = 17$.

5.27 Nalogo lahko rešujemo z osnovno metodo simpleksov, pri čemer moramo le zamenjati P z $-P$ in Max z Min.
Lahko pa se je lotimo tako, da grafično rešimo dualno nalogo, nato pa rekonstruiramo rešitve prvotne naloge. Dualni LP je (Ψ, Q, Min), kjer je

$$\begin{array}{rcl} \Psi & = & \{ \, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{rrcl} u+ & 3v & \geq & 2, \\ 2u+ & 3v & \geq & 7, \\ u+ & 2v & \geq & 4, \\ & u,v & \geq & 0 \, \} \end{array} \\ Q(u,v) & = & 10u + 10v \end{array}$$

Rešitev dualnega sistema je $(u^*, v^*) = (0, \frac{7}{3})$, $Q^* = \frac{70}{3}$. Vemo, da imasta dualna LP v rešitvah enake vrednosti kriterijske funkcije, torej je $P^* = Q^* = \frac{70}{3}$.

Slika 37: Območje Φ **5.29**

V rešitvi dualnega LP je zasičena le druga neenačba ki ustreza spremenljivki y prvotnega LP, torej je $x^* = z^* = 0$. y^* določimo iz zveze

$$\frac{70}{3} = Q^* = P^* = 2 * 0 + 7 * y^* + 4 * 0 \implies y^* = \frac{10}{3}$$

5.28 Drugo neenačbo pomnožimo z -1, uvedemo novo spremenljivko $y' = -y \geq 0$, namesto P vzamemo $-P$, namesto Max Min ter nalogo rešimo z običajno metodo simpleksov. Rešitev je $x^* = 12, \quad y^* = z^* = 0, \quad P^* = 12$.

5.29 Pomagamo si z grafično predstavitvijo 37 območja Φ. Nivojnice so premice $2x+\lambda y = c$ in $x = c$ pri $\lambda = 0$. Kriterijska funkcija P_λ:
– za $\lambda < 0$ narašča z manjšanjem y,
– za $\lambda = 0$ narašča z večanjem x ter
– za $\lambda < 0$ narašča z večanjem y.
Za vsako nosilko stranice Φ poiščemo vrednost λ, pri kateri ji je nivojnica vzporedna, nato pa preverimo še, ali je vrednost kriterijske funkcije P večja na nasprotnem bregu nosilke od tistega, na katerem leži Φ.

nosilka stranice		$\lambda =$	
$x = 0$	$\lambda y = const$	0	vendar P narašča v notranjost Φ
$y = 3 + x$	$2x + \lambda(3 + x) = (2 + \lambda)x + 3\lambda = const$	-2	vendar P narašča v notranjost Φ
$y = 6 - \frac{x}{2}$	$2x + \lambda(6 - \frac{x}{2}) = (2 - \frac{\lambda}{2})x + 6\lambda = const$	4	
$y = 3x - 15$	$2x + \lambda(3x - 15) = (2 + 3\lambda)x - 15\lambda = const$	$-\frac{2}{3}$	
$y = 0$	$2x = const$, kar je nerešljivo	$---$	

Pri naštetih vrednostih λ P doseže maksimum na daljici, pri vmesnih vrednostih pa le v ogljiščih poliedra. Povzemimo:

$\lambda < -\frac{2}{3}$	:	rešitev je točka $(5,0)$	$P_\lambda^* = 10$
$\lambda = -\frac{2}{3}$	:	rešitev je daljica $[(5,0),(6,3)]$	$P_{-\frac{2}{3}}^* = 10$
$-\frac{2}{3} < \lambda < 4$	:	rešitev je točka $(6,3)$	$P_\lambda^* = 12 + 3\lambda$
$\lambda = 4$	:	rešitev je daljica $[(6,3),(2,5)]$	$P_\lambda^* = 24$
$\lambda > 4$	:	rešitev je točka $(2,5)$	$P_\lambda^* = 4 + 5\lambda$

5.30 $x^* = \frac{4}{3},\ \ y^* = \frac{2}{3},\ \ z = 8,\ \ P^* = \frac{46}{3}$
Svetujemo eno od neznank izraziti iz enačbe s preostalima dvema, nato pa nalogo rešiti grafično.

5.31 Najprej uvedemo novo spremenljivko $z' := -z \geq 0$, zamenjamo P z $P' = -P$ ter Max z Min, nato pa nalogo uženemo z izpeljanko osnovnega simpleksnega algoritma, imenovano veliki M, ki nam omogoči priti do začetne dopustne rešitve za običajni simpleksni algoritem v primeru, ko je katera od neenačb tipa ... $\geq b$ s pozitivno desno stranjo $b > 0$, za vse spremenljivke pa velja pogoj nenegativnosti.

Kuharski recept za veliki M

Sestavine: Naloga LP $= (\Phi, P, Min)$ z nenegativnimi desnimi stranmi neenačb in pogojem nenegativnosti za vse spremenljivke. Vsaj ena neenačba tipa ... $\geq b$.

Potrebujete še:
papir ali drug podoben medij,
svinčnik ali drugo podobno sredstvo, ki ustreza mediju iz prejšnje vrstice,
kalkulator ali logaritemske tablice (po želji),
ščepec možganov, kanček natančnosti in zvrhano mero potrpljenja.

Če navedenih sredstev nimate na voljo, lahko uporabite tudi računalnik ali PC[2].

Čas kuhanja: od nekaj minut do ∞, odvisno od količine in trdote sestavin, uporabljenih pripomočkov in spretnosti kuharja.

Opozorilo: Avtor ne odgovarja za morebitne zdravstvene težave, ki bi lahko nastopile pri preobčutljivem ali tovrstnih opravil ne vajenem uporabniku recepta.

Postopek: Najprej vsaki neenačbi priredimo po eno dodatno nenegativno spremenljivko, ki jo levim stranem neenačb tipa ... $\leq b > 0$ prištejemo, levim stranem preostalih neenačb tipa ... $\geq b > 0$ pa odštejemo. S tem vse neenačbe preidejo v enačbe, vendar pa $\mathbf{0}$ ni dopustna rešitev sistema. Pomagamo si tako, da uvedemo za vsako neenačbo drugega tipa še po eno nenegativno *umetno spremenljivko* in jo prištejemo njeni levi strani. Sedaj je $\mathbf{0}$ dopustna rešitev sistema, v njej pa so vse umetne in tiste *dodatne spremenljivke*, ki ustrezajo neenačbam prvega tipa različne od 0, vendar pa to ni sistem, ki bi reševal prvotno nalogo. Zato si pomagamo z *metodo kazenskih funkcij*: v funkcionalu, katerega minimum iščemo, "kaznujemo" *umetne spremenljivke* tako, da jim pripišemo neko zelo veliko pozitivno vrednost, označimo jo z M, odtod tudi ime metode. V praksi pri računanju z računalnikom uporabimo kako zeloooooooooooo veliko realno število, pri računanju peš, za katero je mimogrede povedano metoda velikega

[2]Vendar v primeru Pentiuma pazite, da ne boste računali v plavajoči vejici.

M primerna, pa si pomagamo kar s simbolnim zapisom, pri čemer ob vsaki primerjavi števil upoštevamo, kot da je $\forall x \in \mathbb{R} : M > x$.

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x+ & 4y- & z'+ & s & & = 6 \\ 2x+ & y- & 3z'- & t & +u & = 2 \end{array}$$

Do pravilnega funkcionala, ki bo po "izničenju" *umetnih spremenljivk* oziroma po njihovem izrinjenju iz baze ustrezal prvotnemu funkcionalu naloge LP pridemo tako, da prepišemo dobljeni sistem enačb v simpleksno tabelo, pri čemer v vrstici funkcionala prepišemo prvotne koeficiente pri pravih spremenljivkah, 0 pri dodatnih ter M pri *umetnih spremenljivkah.*

x	y	z'	s	t	u	
-5	2	1	0	0	M	0
2	4	-1	1	0	0	6
2	1	-3	0	-1	1	2

To seveda še ni prava simpleksna tabela, saj ne predstavlja nobene dopustne rešitve sistema. Bazni stolpci namreč ustrezajo *dodatnim spremenljivkam*, kar pa kot vemo ni možno. Do pravega prvega plana oziroma prve že omenjene dopustne rešitve dopolnjenega sistema pridemo tako, da **od vrstice funkcionala odštejemo vse vrstice tabele, ki ustrezajo neenačbam drugega tipa**. Tako pridemo do prvega plana za metodo velikega M, ko bazo sestavljajo vse umetne in tiste *dodatne spremenljivke*, ki ustrezajo neenačbam prvega tipa. Nad njim izvajamo običajni simpleksni algoritem, dokler vse *umetne spremenljivke* ne padejo iz baze oziroma pridemo do dopustne rešitve sistema, v kateri imajo vse *umetne spremenljivke* vrednost 0.

x	y	z'	s	t	u	
$-5-2M$	$2-M$	$1+3M$	0	M	0	$-2M$
2	4	-1	1	0	0	6
$\boxed{2}$	1	-3	0	-1	1	2
0	14	-13	0	-5	$2M+5$	10
0	3	2	1	1	-1	4
2	1	-3	0	-1	1	2

Tedaj M tudi ne nastopa več v nobenem od stolpcev, ki ne pripada kaki *umetni spremenljivki*, niti v vrednosti funkcionala v trenutni dopustni rešitvi. Taka dopustna rešitev pa je tudi dopustna rešitev prvotne naloge. Nadaljujemo osnovni simpleksn algoritem, saj *umetne spremenljivke* ne morejo več v bazo zaradi pozitivnih koeficientov pri M v vrstici funkcionala. Zato lahko na njih odslej "pozabimo" in računamo le s preostalimi stolpci tabele.

x	y	z'	s	t	u	
0	14	-13	0	-5	$---$	10
0	3	$\boxed{2}$	1	1	$---$	4
2	1	-3	0	-1	$---$	2
0	67	0	13	3	$---$	72
0	3	2	1	1	$---$	4
4	11	0	3	1	$---$	16

Zgodi se lahko, da vse *umetne spremenljivke* ne izpadejo iz baze. To pa pomeni, da so prvotni pogoji protislovni oziroma da prvotna naloga sploh nima dopustnih rešitev oziroma da je polieder prazna množica.
Simpleksni algoritem se je ustavil v rešitvi, ki jo razberemo iz tabele:

$$x^* = 4, \quad y^* = 0, \quad z'^* = 2 \implies z^* = -2, \quad P'^* = -\frac{72}{4} = -18 \implies P^* = 18$$

5.32 $P^* = \frac{105}{2}$, $x^* = 0.5$, $y^* = -1.1$, $z^* = 0$
Rešujemo lahko na več načinov.
– Tako, da prevedemo na dualni LP, ki ga rešimo grafično.
– S standardnim prijemom, ko uvedemo namesto y dve novi spremenljivki y^+ in y^-, da je $y = y^+ - y^-$ in $y^+, y^- \geq 0$.
– Rešimo dva LP, prvega z dodatnim pogojem $y \geq 0$, drugega pa z $y \leq 0$ in dodatno substitucijo $y' = -y \geq 0$.

5.33 Vpeljemo tri *dodatne* nenegativne *spremenljivke*, s katerimi prevedemo sistem neenačb na sistem enačb, zamenjamo P z $-P$ ter Min z Max, nato pa lahko nalogo rešujemo z osnovnim simpleksnim algoritmom. Po dveh korakih pridemo do rešitve

$$x^* = \frac{2}{3}, \quad y^* = \frac{10}{3}, \quad z^* = 0 \text{ ter } P^* = \frac{22}{3}$$

5.34 Naloga je pisana na kožo osnovnemu simpleksnemu algoritmu, če le pred tem spremenimo predznak kriterijske funkcije $(\Phi, -P, \text{Max})$ ter vpeljemo *dodatne spremenljivke* $s, t, u \geq 0$, ki prevedejo neenačbe na enačbe:

$$\begin{array}{rrrrrr} x+ & 2y+ & 4z- & w+ & s = & 6 \\ 2x+ & 3y- & z+ & w+ & t = & 12 \\ x+ & & z+ & w+ & u = & 4 \end{array}$$

Postopek reševanja prikazuje tabela, v kateri so pivotni elementi podčrtani, zaporedne simpleksne tabele ločene z dvojno črto, vrstica funkcionala pa je od preostanka tabele ločena z enojno črto. Levo ob vrstici funkcionala je označeno, s katerim številom smo jo pomnožili, da bi se izognili računanju z ulomki.

	x	y	z	w	s	t	u	
	-2	-1	-5	3	0	0	0	0
	1	2	$\boxed{4}$	-1	1	0	0	6
	2	3	-1	1	0	1	0	12
	1	0	1	1	0	0	1	4
$4\times$	-3	6	0	7	5	0	0	30
	1	2	4	-1	1	0	0	6
	9	14	0	3	1	4	0	54
	$\boxed{3}$	-2	0	5	-1	0	4	10
$4\times$	0	4	0	12	4	0	4	40
	0	8	12	-8	4	0	-4	8
	0	20	0	-12	4	4	-12	24
	3	-2	0	5	-1	0	4	10

Odtod brez težav razberemo rešitev prvotne naloge:

$$x^* = \frac{10}{3}, \quad y^* = 0, \quad z^* = \frac{2}{3}, \quad w^* = 0 \text{ ter } \; P^* = 10$$

5.35 Uvedemo novo spremenljivko $x' = -x \geq 0$, prvo neenačbo pomnožimo z -1, P zamenjamo z $-P$, Max z Min, nato pa nalogo rešimo s simpleksnim algoritmom. Rešitev je

$$x^* = 0, \quad y^* = 10, \quad z^* = \frac{20}{3}, \quad P^* = 70$$

5.36 Nalogo lahko rešimo z metodo velikega M ali pa z reševanjem dualne naloge. Na tem mestu opišimo postopek reševanja dualnega LP z metodo simpleksov. Primer je poučen zato, ker je dualni LP izrojen in rešljiv, torej ima prvotna naloga več rešitev.
Dualni LP je (Φ, P, Max), kjer je
$\Phi \;=\; \{\{(u,v) \in (RR^+)^2 \mid \; u + 3v \leq 2, \; 2u + 4v \leq 3, \; 2u \leq 1\; \}$
in $P(u,v) \;=\; 8u + 6v$
Simpleksna tabela za prvi korak je

u	v	r	s	t	
-8	-6	0	0	0	0
1	3	1	0	0	2
2	4	0	1	0	3
$\boxed{2}$	0	0	0	1	1
0	-6	0	0	4	4
0	$\boxed{6}$	2	0	-1	3
0	$\boxed{4}$	0	1	-1	2
2	0	0	0	1	1

Izbiramo lahko med dvema enakovrednima pivotoma kar pomeni, da je naloga izrojena.
Izberimo najprej 6

0	-6	0	0	4	4
0	$\boxed{6}$	2	0	-1	3
0	4	0	1	-1	2
2	0	0	0	1	1
0	0	2	0	3	7
0	6	2	0	-1	3
0	0	-4	3	-1	0
2	0	0	0	1	1

Odtod iz vrstice funkcionala pri *dodatnih spremenljivkah* razberemo rešitev prvotne naloge

$$x_1^* = 2, \quad y_1^* = 0, \quad z_1^* = 3, \quad P^* = 7$$

Ker je naloga izrojena, (kar med drugim vidimo tako, da je v desnem stolpcu element 0,) utegne imeti prvotna naloga še eno rešitev. Do nje pridemo tako, ponovimo zadnji korak postopka z drugim od enakovrednih pivotov 4. (Vrednost funkcionala se s tem seveda ne spremeni, prav tako tudi ne rešitev naloge dualnega LP, ki pa nas tako in tako ne zanima.)

	0	-6	0	0	4	4
	0	6	2	0	-1	3
	0	$\boxed{4}$	0	1	-1	2
	2	0	0	0	1	1
$2\times$	0	0	0	3	5	14
	0	0	4	-3	1	0
	0	4	0	1	-1	2
	2	0	0	0	1	1

Odtod razberemo drugo rešitev prvotne naloge

$$x_2^* = 0, \quad y_2^* = \frac{3}{2}, \quad z_2^* = \frac{5}{2}$$

Splošna rešitev je tedaj oblike

$$x^* = 2\lambda, \quad y^* = \frac{3}{2}(1-\lambda), \quad z^* = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda, \quad P^* = 7$$

kjer je λ poljubno število z intervala $[0,1]$.

5.37 Nalogo rešujemo z osnovno metodo simpleksov, pred tem pa P nadomestimo z $-P$, Max z Min ter vpeljemo tri *dodatne spremenljivke*, za vsako neenačbo po eno. Po dveh korakih simpleksnega algoritma pridemo do rešitve

$$x^* = \frac{17}{3}, \quad y^* = \frac{2}{3}, \quad z^* = 0, \quad P^* = \frac{53}{3}$$

5.38 Nalogo rešujemo tako, da rešimo dve nalogi linearnega programiranja:

$$\mathrm{LP}_1 \;=\; (\Phi, P_1, \mathrm{Max}) \quad \text{in} \quad \mathrm{LP}_2 \;=\; (\Phi, -P_1, \mathrm{Max})$$

kjer je $P_1(x,y) \;=\; 2x - 3y$ oziroma

$$P(x,y) = |P_1(x,y)| = \max\{P_1(x,y), -P_1(x,y)\}$$

po definiciji absolutne vrednosti. Tedaj je tudi

$$\max(\Phi, P) \;=\; \max\{\, \max(\Phi, P_1),\ \max(\Phi, -P_1)\,\}$$

torej prvotno nalogo reši večja od rešitev podnalog. Rešitvi podnalog sta

$$x_1^* = \frac{1}{4}, \quad y_1^* = 0, \quad P_1^* = \frac{1}{2} \quad \text{in} \quad x_2^* = 0, \quad y_2^* = 4, \quad (-P_1)^* = 12$$

Tako je rešitev prvotne naloge enaka rešitvi druge podnaloge:

$$x^* = 0, \quad y^* = 4, \quad P^* = 12$$

Nalogo lahko rešujemo tudi grafično. Nivojnice P so vzporednice premice $2x = 3y$, vrednost P pa je sorazmerna razdalji točke do te premice (?). Iz slike območja Φ je tedaj razvidno, katera točka Φ je najbolj oddaljena.

5.39

$$\Phi \ = \ \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x + 2y \leq 5, \ 2x + y \leq 4, \ x, y \geq 0 \ \}$$

Ločeno rešujemo nalogi $\mathrm{LP}_1 \ = \ (\Phi_1, P_1, \mathrm{Min})$ in $\mathrm{LP}_2 \ = \ (\Phi_2, P_2, \mathrm{Min})$, kjer je

$$\begin{aligned} \Phi_1 \ &= \ \Phi \cap \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x \leq \tfrac{1}{2} \} \quad P_1(x, y) \ = \ 2x + y \\ \Phi_2 \ &= \ \Phi \cap \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x \geq \tfrac{1}{2} \} \quad P_2(x, y) \ = \ x + y + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

P_1 in P_2 sta pri tem zožitvi P na Φ_1 in Φ_2, linearno razširjeni na $\mathbb{R}^2$, tako da dobljeni nalogi lahko rešujemo s standardnimi prijemi za reševanje nalog linearnega programiranja. Velja še opozoriti, da je P zvezna funkcija tudi na mejni premici $x = \frac{1}{2}$, zato nismo naredili napake, ko smo presek te premice z Φ upoštevali tako v Φ_1, kot tudi v Φ_2.

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}(\Phi_1, P_1) \ &= \ \{(0, 0)\}, \quad \ \min(\Phi_1, P_1) \ = \ 0 \\ \mathrm{Min}(\Phi_2, P_2) \ &= \ \{(0.5, 0)\}, \ \min(\Phi_2, P_2) \ = \ 1 \end{aligned}$$

Torej je rešitev prvotne naloge enaka rešitvi prvega LP:

$$\mathrm{Min}(\Phi, P) \ = \ \{(0, 0)\}, \ \min(\Phi, P) \ = \ 0$$

2.6 Problemi, ki se jih da rešiti z linearnim programiranjem

6.1 Označimo z x višino sredstev vloženih v prvi, z y v drugi ter z z v tretji oddelek. Dobiček P lahko tedaj izračunamo po formuli

$$P = 0.3x + 0.2y + 0.3z$$

Prva omejitev sledi iz količine sredstev, ki so na razpolago:

$$x + y + z \leq 40$$

Preostale omejitve so razvidne iz besedila:

$$x \geq 8, \quad y \geq 10, \quad z \leq 2y$$

Ne smemo pozabiti še na nenegatvnost, ki je besedilo eksplicitno ne predpisuje:

$$z \geq 0$$

Ustrezna naloga LP $= (\Phi, P, \mathrm{Max})$ ima več rešitev.

$$P^* = 11$$

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \sim & x_1^* = 10, \quad y_1^* = 10, \quad z_1^* = 20 \\ T_2 & \sim & x_2^* = 30, \quad y_2^* = 10, \quad z_2^* = 0 \end{array}$$

Splošna rešitev T je seveda konveksna kombinacija T_1 in T_2:

$$T = \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2 \quad \sim \quad x^* = 30 - 20\lambda, \ y^* = 10, \ 20\lambda$$

6.2 Zapišemo kot nalogo (celoštevilskega) linearnega programiranja.
Privzamemo: naroči kvečjemu toliko avtomobilov, kot jih lahko proda v naslednjih šestih mesecih.
Oznake: A – št. nabavljenih avtomobilov tipa A, T – št. nab. avtomobilov tipa T.
Maksimiziramo dobiček $P(A,T) = 600A + 300T$
pri omejitvah:
razpoložljivi denar: $4000A + 3000T \leq 600000$
razpoložljivi čas: $4A + 6T \leq 960$
razpoložljivi avtomobili: $A \leq 100, \ \ T \leq 300$
druge omejitve: $T \geq 100, \ \ A \geq 0$

Dobimo rešitev: $A^* = 75, \ \ T^* = 100, \ \ P^* = 75000$

6.3 Zapišemo kot nalogo linearnega programiranja:
z A, B, C in D označimo število enot narejenih izdelkov ustreznega tipa.
Maksimiziramo dobiček $P(A,B,C,D) = 7A + 10B + 5C + 6D$
pri omejitvah:
surovina 1: $2A + 4B + 2.5C + D \leq 200$
surovina 2: $3.5A + 2B + 2C + 3.5D \leq 300$
surovina 3: $4A + B + 3C + 2.5D \leq 400$

delo: $5A + 4B + 3C + 6D \leq 300$
druge omejitve: $A, B, C, D \geq 0$

Dobimo rešitev: $A^* = 0, \quad B^* = 45, \quad C^* = 0, \quad D^* = 20, \quad P^* = 570$

6.4 Zapišemo kot nalogo linearnega programiranja:
z J, K in L označimo število enot vsake od ustreznih jedi, ki sestavljajo jedilnik.
Minimiziramo ceno $10 * C(J, K, L) \; = \; 5J + 8K + 6L$
pri omejitvah:
živilo A: $5J + K \geq 8$
živilo B: $2J + 2K + L \geq 10$
živilo C: $J + 5K + 4L \geq 22$
ostale omejitve: $J, K, L \geq 0$

Dobimo rešitev: $J^* = 0.75, \quad K^* = 4.25, \quad L^* = 0, \quad C^* = 3.775$

6.5 **Oznake:** S in T uporabimo kot množici indeksov.
$X_{s,t}$ naj pomeni količino blaga, prepeljanega iz skladišča s v trgovino t,
k_s naj pomeni kapaciteto skladišča s,
z_t naj pomeni zahtevane mesečne dobave trgovine t,
$P_{s,t}$ pa naj pomeni strošek prevoza vsake enote blaga iz skladišča s v trgovino t.
Minimiziramo $C(X) \; = \; \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} P_{s,t} X_{s,t}$
pri omejitvah:
skladišča: $\sum_{t \in T} X_{s,t} \leq k_s$ za vse $s \in S$;
trgovine: $\sum_{s \in S} X_{s,t} = z_t$ za vse $t \in T$;
druge omejitve: $X_{s,t} \geq 0$ za vse $s \in S$ in $t \in T$.

6.6 $D_1 = (100, 0, 0), \; D_2 = (40, 50, 110), \; C^* = 1710$

6.7 Z s, m in k označimo število miz oziroma klopi, izdelanih mesečno. Tedaj znaša mesečni profit $P(s, m, k) \; = \; 200s + 500m + 800k$, omejitve pa so

$$\begin{array}{ccccccc} 0.3s & + & 0.4m & & & \leq & 120 \\ 0.1s & + & 0.2m & + & 0.5k & \leq & 150 \end{array}$$

ter seveda tudi $s, m, k \; \geq \; 0$.

$P^* = 294000, \; s^* = 0, \; m^* = 300, \; k^* = 180$

6.8 $A : B : C : D : E \; \doteq \; 14.6 : 0 : 20.5 : 10.3 : 4.6, \quad P^* \; \doteq \; 1490/\text{kg}$

6.9 Z x označimo število na uro zvarjenih sodov *ležaka*, z y *težaka* in z z *obležaka*. Profit tedaj znaša

$$P(x, y, z) \; = \; 100(3x + 2y + 3z)$$

omejitve, ki jih narekuje zdrava pamet, so

$$\text{nenegativnost } x, y, z \geq 0$$

omejitve, ki jih narekuje narava proizvodnega procesa, pa

$$\begin{array}{lcrrrcr} \text{sladkor} & : & x+ & 2y+ & 3z & \leq & 60 \\ \text{slad} & : & 2x+ & y+ & z & \leq & 40 \\ \text{hmelj} & : & x+ & y+ & z & \leq & 30 \end{array}$$

Nalogo rešujemo z osnovno metodo simpleks, pri čemer po dveh korakih pridemo do rešitve

$$x^* = 12,\ y^* = 0,\ z^* = 16,\ P^* = 8400,$$

torej naj vsak uro zvarijo 12 sodov *ležaka* in 16 sodov *obležaka*, medtem ko se jim *težaka* sploh ne izplača variti. Tako bodo zaslužili vsako uro po 8400 tolarjev.

6.10 Količine narejenega črnega, rožnatega in belega vina označimo z x, y in z. Izkupiček znaša $P(x,y,z) = 2x + 3y + 5z$.
Omejitve (izhajajo iz zdrave pameti in omejenih virov) so tedaj naslednje:

nenegativnost:	$x, y, z \geq 0$	(ne morejo proizvesti manj kot 0 enot vina)
	$1.5x + 3y + 0.5z \leq 300$	(temno grozdje)
	$1.1x + 0.5y + 2.8z \leq 325$	(svetlo grozdje)
	$1.8x + 1.6y + 1.3z \leq 150$	(sladkor)
	$x + 1.5y + 0.5z \leq 220$	(delo)
		(kemikalije niso omejene)

Za lažje računanje se izplača vsako od naštetih neenačb še pomnožiti s skupnim imenovalcem, da lahko naprej računamo s celimi števili.
LP uženemo z osnovnim simplexnim algoritmom za $-P$. Do rešitve pridemo že po enem koraku:

$$x^* = y^* = 0,\ z^* = \frac{1500}{13},\ p^* \doteq 577$$

6.11 30000 enot parfuma naj naredijo s prvim, 25000 enot pa z drugim procesom. Z Majo naj najamejsklenejo pogodbo za 270 ur. Če se predvidevanja izkažejo za pravilna, lahko pričakujejo, da bodo prodali ves parfum in iztržili 118000 donarjev dobička.

6.12 $40 - 20\lambda$ tovornjakov ter 30λ avtomobilov $(0 \leq \lambda \leq 1)$. Pri tem dnevni profit znaša 12000 donarjev.

6.13 Naj A, B C, D in E pomeni kar tedensko količino ustreznega izdelka v kilogramih. Predpostavimo, da vse izdelke tudi prodajo. Tedaj zasližek P izračunamo kot razliko med iztržkom ter obratovalnimi stroški in stroški za nabavo surovin:

$$P(A,B,C,D,E) = \frac{1}{60}(85A + 86B + 111C + 131D + 102E)$$

Omejitve predstavljajo posamezni stroji ter nenegativnost:

Stroj P : $12A + 7B + 8C + 10D + 7E \leq 5760$ minut
Stroj P : $8A + 9B + 4C + 11E \leq 4320$ minut
Stroj P : $5A + 10B + 7C + 3D + 2E \leq 7200$ minut
Nenegativnost : $A, B, C, D, E \geq 0$

Odtod $P^* = 1347.6$, $A^* = B^* = D^* = 0$, $C^* = 552$ in $E^* = 192$.

6.14 Označimo z x število mesečno proizvedenih barvnih, z y pa črnobelih televizorjev. Ob racionalni predpostavki, da proizvajajo le toliko televizorjev kot jih lahko prodajo, je kriterijska funkcija, ki jo maksimizirajo

$$P(x,y) = 60x + 30y$$

Omejitve pa so:

racionalni predpostavki : $x \leq 1000,\ y \leq 4000$
razpoložljivo delo : $20x + 15y \leq 50000$
nenegativnost : $x, y \geq 0$

$P^* = 120000,\ x^* = 1000,\ y^* = 2000$

2.7 Diskretni optimizacijski problemi in ostalo

7.1 3

7.2 3. Graf vsebuje podgraf K_3.

7.4 Graf lahko pobarvamo s štirimi barvami. Z manj kot štirimi barvami ga ne moremo pobarvati, ker vsebuje podgraf K_4. Torej je barvnost grafa enaka 4.

7.5 Barvnost grafa je 3: graf lahko pobarvamo s tremi barvami, z dvema pa ne, saj vsebuje cikle lihih dolžin, torej ni dvodelen (= 2–pobarvljiv) graf.

7.6 Barvnost grafa je 3. Ker vsebuje poln podgraf na treh točkah, ga z manj kot tremi barvami ne moremo pobarvati.

7.7 4

7.9 4. Prevedemo na na nalogo barvanja grafa, katerega točke so področja "zemljevida". Graf vsebuje poln podgraf na štirih točkah.

7.10 Nalogo prevedemo na enakovredno nalogo barvanja grafa z dano matriko sosednosti. Graf je mogoče pobarvati sštirimi barvami, na primer

točka	a	b	c	d	e	f	g
barva	2	1	3	2	4	1	1

z manj kot štirimi barvami pa to ni možno, ker graf vsebuje podgraf izomorfen K_4, ki ga inducirajo točke a, c, e, g.
Rešitev prvotne naloge: potrebujemo štiri frekvence. Ena od možnih dodelitev frekvenc je tista, ki jo lahko razberemo iz barvanja ustreznega grafa: prvo frekvenco dodelimo oddajnikom b, f in g, drugo a in d, tretjo c in četrto frekvenco oddajniku e.

7.11 15

7.15 25

7.16 12. Prerez je $(\{s, A, B, C\}, \{D, E, t\})$.

7.17 12

7.18 Največji pretok je 12, na primer

$$\begin{array}{ll}
a-b-e-f-h & : \ 5 \\
a-b-c-e-f-g-h & : \ 1 \\
a-c-e-h & : \ 2 \\
a-d-e-g-h & : \ 3 \\
a-d-g-h & : \ 1
\end{array}$$

primer najmanjšega prereza pa je

$$\{a, b, c, d, e\},\ \{f, g, h\}$$

7.19 Največji pretok znaša 8.

7.20 Največji pretok je 15. Ustrezen prerez je na prmer $\{a-c, a-d, e-d, e-h, f-h\}$.

7.21 Največji pretok je 12, na primer
$s-a-d-t\ :\ 4$
$s-b-e-t\ :\ 2$
$s-c-d-e-t\ :\ 5$
$s-b-c-d-e-t\ :\ 1$
Najmanjši prerez na primer vsebuje povezave $\{b-e, d-e, d-t\}$.

7.22

a) 12, min. prerez je $\{BE, CE, CF, DF\}$.

b) Za 1 povečamo katerokoli povezavo v min. prerezu.

7.23

a) 25

b) Propustnost ene od povezav $8 \longrightarrow 10$ ali $7 \longrightarrow 10$ povečamo za 2.

7.25 Pokažemo za presek minimalnih prerezov.
Zaradi berljivejšega zapisa označimo komplemente na običajen način, torej $V \backslash A = \overline{A}$.
Pokažimo, da je $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ prerez:
ker $s \in X$ ter $s \in Y$, odtod $s \in X \cap Y$;
podobno $t \in \overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X \cap Y}$.
Pokažimo še minimalnost prereza $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$:
če $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ ni minimalen prerez, tedaj vsebuje nenasičeno povezavo. Toda vsaka povezava v $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ je bodisi v $(X, \overline{X})$, bodisi v $(Y, \overline{Y})$. Tako vsaj eden od teh prerezov ni minimalen, kar je v protislovno. Zato je prerez $(X \cap Y, \overline{X \cap Y})$ minimalen. Za unijo je dokaz podoben, lahko pa le uporabimo De Morganovo pravilo $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

7.26 Nalogo prevedemo na običajno nalogo največjega pretoka po omrežju tako, da vsako vozlišče z omejeno propustnostjo razcepimo v dve vozlišči. Prvo naredimo za končno vozlišče vseh vstopajočih povezav starega vozlišča, drugo za začetno vozlišče vseh izstopajočih povezav starega vozlišča, nato pa dodamo povezavo iz prvega v drugo vozlišče s propustnostjo enako propustnosti starega vozlišča. Največji pretok skozi dobljeno omrežje je enak 10.

7.27 Ustrezno omrežje 38 konstruiramo tako, da vsako od treh družin predstavimo s po eno povezavo, vse tri s skupno začetno točko s, propustnost vsake pa je enaka številu članov predstavljene družine. Podobno vsakega od štirih avtomobilov predstavimo s po

Slika 38: Omrežje **7.27**

eno povezavo, vse štiri s skupno končno točko t, propustnost vsake pa je enaka številu sedežev v predstavljenem avtomobilu. Na koncu povežemo končno točko povezave vsake od družin z začetno točko povezave vsakega od avtomobilov ($3 \times 4 = 12$ povezav), ki jim pripišemo propustnost po 2, kar ustreza zahtevi, da se v nobenem od avtomobilov ne smeta peljati več kot dva člana iste družine.
Skozi tako konstruirano omrežje je največji pretok iz s v t 13, torej je naloga rešljiva. Poiščemo enega od pretokov z vrednostjo 13 ter odtod razberemo rešitev prvotne naloge. Na primer:

$$\begin{array}{llll}
s - Kr & -A_1 & -t : & 2 \\
s - Kr & -A_2 & -t : & 1 \\
s - Kr & -A_3 & -t : & 2 \\
s - Pe & -A_2 & -t : & 1 \\
s - Pe & -A_3 & -t : & 1 \\
s - Pe & -A_4 & -t : & 2 \\
s - Si & -A_1 & -t : & 2 \\
s - Si & -A_4 & -t : & 2
\end{array}$$

kar ustreza rešitvi prvotne naloge

	A_1	A_2	A_3	A_4	$\sum$
Kr	2	1	2	0	5
Pe	0	1	1	2	4
Si	2	0	0	2	4
$\sum$	4	2	3	4	13

7.28

a) Ustrezno omrežje konstruiramo tako, da stroje predstavimo s povezavami, poti med stroji pa s točkami. Strojem, ki sprejemajo polizdelke z različnih strojev, dodamo na vstopu povezave z neskončno veliko propustnostjo, propustnost preostalih povezav pa je enaka urni zmogljivosti stroja, ki ga predstavlja. Dobljeno omrežje prikazuje slika 39

Največji pretok skozi omrežje na sliki je 14, minimalni prerez na primer vsebuje le povezavo, ki predstavlja prvi stroj (tistega z zmogljivostjo 14).

Slika 39: Omrežje **7.28**

b) Minimalni prerez pa je tudi tisti, ki vsebuje le zadnja stroja (tista z zmogljivostima 12 in 2), zato le s povečanjem zmogljivosti enega stroja ne moremo povečati števila v eni uri narejenih končnih izdelkov.

7.29 Ustrezno omrežje gradimo na naslednji način:
Iz skupnega izvora napeljemo po eno povezavo s kapaciteto 4 za vsak tip tovora.
V ponor pripeljemo po eno povezavo za vsako letalo; kapaciteta vsake je enaka številu zabojnikov, ki jih letalo lahko prepelje.
med konec povezave vsakega tipa tovora in začetek povezave vsakega letala napeljemo povezavo s kapaciteto 1 (torej 7×5 povezav).
Največji pretok skozi dobljeno omrežje je enak 28, česar ni težko pokazati. Vsaka realizacija takega pretoka da po eno rešitev prvotne naloge. To razberemo iz zapolnjenosti povezav v srednjem delu grafa.

7.30

a) Glej prejšnjo nalogo (paketi na letala).

7.31 $x^* = y^* = 3,\ P^* = 21$

7.32 $(x^*, y^*) = (1,1)\ \ P^* = 9$ (oziroma (2,0), 8, če dovolimo tudi 0).

7.33 $\mathrm{Max}(\Phi, P) = \{\ (2,2),\ (3,1)\ \}$, $\max(\Phi, P) = 4$.

7.34 $P^* = 60$

7.35 Nalogo rešimo v dveh korakih.
Prvi korak: konstruiramo enakovredno nalogo (Ψ, Q, Max)

$$\begin{aligned} \Psi &= \{\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 4x + 3y \leq 20,\ x, y \geq 0\ \} \\ Q(x,y) &= \{P(x,y,0) = 6x + 5y \end{aligned}$$

Pokažemo, da je v vsaki od rešitev (x^*, y^*, z^*) prvotne naloge $z^* = 0$.
Nato dokažemo enakovrednost nalog (Φ, P, Max) in (Ψ, Q, Max).
Drugi korak: rešimo nalogo (Ψ, Q, Max) in odtod razberemo rešitev. prvotne naloge $x^* = 2,\ \ y^* = 4,\ \ z^* = 0,\ \ P^* = 32$

7.36 Pomagamo si z grafično predstavitvijo.
Nivojnice kriterijske funkcije P so premice $y = 3x - \frac{c}{2}$ in so vzporedne s premico $y = 3x+1$, ki ustreza eni od omejitev. Vrednost P je večja na tistem bregu omenjene premice, kjer leži Φ. Nalogo torej rešijo tiste točke Φ, ki ležijo najbližje omenjeni premici. Ker na sami premici ležijo točke $\{(1,4),(2,7),(3,10),...\}$, so od nje oddaljene 0, torej rešijo nalogo. Naštete točke najdemo z reševanjem Diofantske enačbe $3x+y=1$ (ki ima neskončno mnogo rešitev) pri upoštevanju dodatne omejitve $x \geq 1$. Na premici $y = 3x+1$ znaša vrednost kriterijske funkcije -2. Rešitev je torej

$$Min(\Phi, P) = \{ (x, 3x+1) \mid x \in \mathbb{N} \}, \quad min(\Phi, P) = -2$$

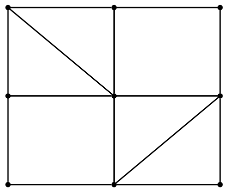
7.37

	a.	b.	c.	vrednost
1.	4	2	0	26
2.	5	0	1	26

7.40 Reševanje gre podobno, kot pri naslednji nalogi.

7.41 Del krivulje med dvema točkama je daljica, torej je v celoti sklenjena poligonska črta s predpisanimi ogljišči.
Primeri $n < 3$ so trivialni. Vzemimo torej $n \geq 3$ in pokažimo:
Če se taka krivulja prekriža, ni optimalna.
Ker so po predpostavki točke v splošni legi, morebitno križišče ni nobena od danih točk. Ustrezni daljici torej sekata druga drugo v notranjosti. Naj bosta to daljici $[A, B]$ ter $[C, D]$. Če ju v optimalni krivulji zamenjamo s paroma daljic $([A, C], [B, D])$ ali $([A, D], [B, C])$ dobimo v natanko enem primeru sklenjeno poligonsko krivuljo, njena dolžina pa je strogo manjša od prvotne krivulje, kar je v protislovju s predpostavko minimalnosti. Vsota dolžin nesosednjih stranic neizrojenega štirikotnika je namreč manjša od vsote dolžin diagonal, v kar se na primer lahko prepričamo tako, da opazujemo trikotnika, ki ju tvori presečišče diagonal skupaj z nesosednjima stranicama. Upoštevamo, da je vsota dolžin dveh stranic neizrojenega trikotnika večja od dolžine tretje stranice. Dokaz slednjega prepuščamo bralcu v razmislek.

7.42 Pokazali bomo, da vedno obstaja najkrajše vpeto drevo, v katerem so koti med zaporednimi pari povezav s skupnim krajiščem najmanj $\frac{\pi}{3}$, torej imajo vse točke drevesa valenco ≤ 6. Še več: tiste točke drevesa, ki imajo valenco enako 6, so obkrožene s sosedi, ki tvorijo ogljišča pravilnega šestkotnika.
Najprej si oglejmo trojico točk, ki vsebuje dve povezavi najkrajšega vpetega drevesa. Tedaj sta to krajši od stranic trikotnika, ki ga tvorijo omenjene točke, sicer ni izpolnjena predpostavka minimalnosti. Po (netrivialnem) izreku Evklidske geometrije, znanem pod imenom *Cosinusni izrek*, tedaj oklepata večjega od kotov trikotnika, ki je tako večji ali kvečjemu enak povprečni velikosti notranjega kota trikotnika, slednja pa znaša $\frac{\pi}{3}$. Še več: če je večji od kotov trikotnika enak $\frac{\pi}{3}$, sta mu enaka tudi preostala kota, tak trikotnik pa poznamo pod imenom je *enakostraničen trikotnik.*



Slika 40: Usmerjen graf **7.45**

Točka najkrajšega vpetega drevesa ima tako lahko valenco 6 le, če ga obkrožajo sami enakostranični trikotniki, to pa po drugi strani pomeni, da njene sosede tvorijo pravilni šestkotnik. Tedaj pa dobimo vpeto drevo enake, torej tudi najmanjše dolžine tudi, če ispustimo eno od povezav, ki vodi iz naše točke valence 6 in namesto nje damo v drevo povezavo med dvema doslej v drevesu nepovezanima točkama tako da ohranimo povezanost drevesa. Pri tem naši točki zmanjšamo valenco na 5, pri tem pa povečamo valenco tiste njene sosede, ki je po vezana z novo povezavo z bivšo sosedo naše točke. Če je bila valenca te točke pred transformacijo enaka 4 ali manj, je vse v redu, sicer pa je lahko bila njena valenca kvečjemu 5, v tem primeru pa točko po transformaciji obkroža pravilni šestkotniok sosed. Postopek torej lahko ponovimo, pri tem pa pazimo, da se ne zaciklamo, da nove povezave vedno izbiramo v smeri stran od prvotne točke valence 6 (v smislu evklidske razdalje med točkami in ne grafovske razdalje v drevesu). Za to imamo povsem proste roke, saj lahko iz šestkotnika izločimo katero koli od šestih povezav ogljišč s središčem. Tako zaradi končnega števila točk prej ali slej priplezamo do roba mreže pravilnih šestkotnikov, ko se postopek ustavi. Ko to ponovimo za vse morebitne točke valence 6, preostame vpeto drevo enake, torej po predpostavki najkrajše dolžine, ki ne vsebuje točk valence 6 ali več.
$\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}$.

7.44

a)

$$\pi(i)\pi(j) \;=\; \pi(j)\pi(i)\;, \quad \pi(i)^2 \;=\; 1$$

$$\Longrightarrow \;\sum_{i,j} a_{ij}\pi(i)\pi(j) \;=\; \sum_{i<j}(a_{ij}+a_{ji})\pi(i)\pi(j) \;+\; \sum_i a_{ii}$$

$P(\pi) \;=\; P(-\pi)$
$P(\pi) \;=\; 3 \;=\; 21-19$

7.45

a) Naloga je rešljiva natanko tedaj, ko je G povezan graf brez *mosta.*

b) Rešitev je prikazana na sliki 40.

7.46

Slika 41: Družina rotagrafov **7.46**

a) Ena od možnih formalizacij naloge je (Φ, P, Min), kjer je

$$\Phi \ = \ \{ \ \mathcal{P} \mid \ \exists l \in \mathbb{N} \forall i \in 1..l \ \exists H_i \leq G \exists k_i \in \mathbb{N} \ (\ \mathcal{P} \ = \ \{ \ H_j \mid j \in 1..l \ \} \text{ in } H_i \equiv P_{k_i} \text{ in}$$

$$\bigcup_{j=1}^{l} V(H_j) \ = \ V(G) \text{ in } \forall j_1, j_2 \in 1..l \ (\ j_1 \neq j_2 \ \rightarrow \ V(H_{j_1}) \cap V(H_{j_2}) \ = \ \emptyset \ ) \ ) \ \}$$

(Uporabljene so oznake teorije grafov.)
Z besedami: $\mathcal{P}$ je disjunktno pokritje grafa G s potmi v G.

$$P(\mathcal{P}) \ = \ |\mathcal{P}| \quad \text{število poti pokritja}\, \mathcal{P}$$

Problem je NP-poln.
Polinomska prevedba problema eksistence Hamiltonske poti v grafu G na ta problem je naslednja: če je $\mathrm{Min}(\Phi, P) = 1$, tedaj obstaja Hamiltonska pot v G, sicer pa ne.

b) Potrebnih (in zadostnih) je $(n-3) \div 2$ poti za $n \geq 5$, za $n = 2, 3, 4, 5, 6$ pa ena pot.

Utemeljitev: rešimo problem za družino rotagrafov (katere splošen predstavnik je shematično predstavljen na sliki 41)

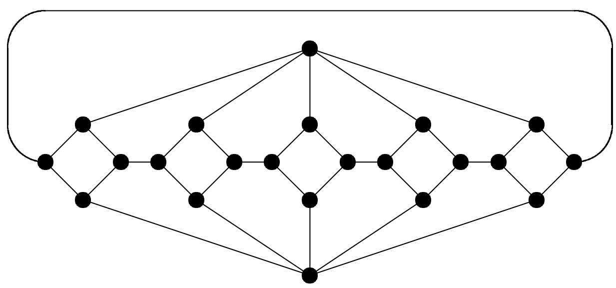
kjer potrebujemo $(n+1) \div 2$ poti. Po dva sosednja C_4 obidemo z eno potjo, ki ima krajišči v "zgornjih" ali "spodnjih" točkah obeh ciklov.
Iz rotagrafov omenjene družine dobimo grafe G_n tako, da dodamo dve točki, nato pa prvo povežemo z vsemi "zgornjimi" točkami, drugo pa z vsemi "spodnjimi" točkami ciklov. Dve poti iz rešitve problema za ustrezen rotagraf, ki imata vsaj po eno krajišče v "zgornjih" točkah nato povežemo prek prve, dve poti z vsaj po enim krajiščem v "spodnjih" točkah pa prek druge dodatne točke. Tako smo število potrebnih poti zmanjšali za 2, če smo le na začetku imeli 3 poti. Skupaj torej
$(n+1) \div 2 \ - \ 2 \ = \ (n-3) \div 2$

Rešitev za primer G_5 je torej 1 pot, na primer ta, ki je razvidna s slike 42

7.48

a) Rešitev z 11 preklopi kretnice

b) Algoritem *navadnega izbiranja* zna urediti vsako zaporedje.



Slika 42: Graf **7.46**

3. Dodatek

3.1 Testiranje pozitivne definitnosti matrike

```
program PD_test;

var
  n  : integer;
  i,j: integer;
  r  : real;
  f  : text;


function PD( var n : integer; ifn : string ) : boolean;

(* PSD testira realno n*n matriko, ali je pozitivno definitna.            *)
(* Postopek je povzet po [Katta Murty : Linear and combinatorial programing].*)
(*                                                                        *)
(*                                     T                          n       *)
(* Ce je matrika pozitivno definitna ( x Ax > 0 za vsak x <> 0 iz R  )    *)
(* vrne vrednost PD = TRUE, ce ni pozitivno definitna, ali ce odkrije napako *)
(* vrne vrednost PD = FALSE, morebitno napako pa signalizira z n = -1.    *)
(*                                                                        *)
(* Format podatkov: ASCII datoteka dolga n vrst, v vsaki vrsti je n realnih *)
(* stevil, ki opisujejo ustrezno vrsto matrike. Ime datoteke je ifn.      *)
(* 0 < n <= 50                                                            *)

  const
    maxn = 50;

  var
    D       : array[1..maxn,1..maxn] of real;
    i, j, k : integer;
    r       : real;
    f       : text;

  begin
    PD := FALSE;
    if ( n > 0 ) and ( n <= maxn ) then
      begin

      (* branje podatkov : *)

        assign( f, ifn );
        reset( f );
        i := 1;
        while ( i <= n ) and not eof( f ) do
```



```
    begin
      j := 1;
      while ( j <= n ) and not eoln( f ) and not eof( f ) do
        begin
          read( f, D[i,j] );
          j := j + 1
        end;
      if j <= n then                      (* napaka formata podatkov *)
        i := n + 1
      else
        readln ( f );
      i := i + 1
    end;
  close( f );
  if ( i <= n ) or ( i = n + 2 ) then     (* napaka formata podatkov *)
    n := -1
  else
    begin

    (* test pozitivne definitnosti : *)

      for i := 1 to n - 1 do
        begin
          D[i,i] := 2*D[i,i];
          for j := i + 1 to n do
            begin
              D[i,j] := D[i,j] + D[j,i];
              D[j,i] := D[i,j]
            end;
          D[n,n] := 2*D[n,n];
        end;                                        (*        T   *)
                                                    (*   D = D    *)
      i := 1;
      while i < n do
        begin
          k := i - 1;
          repeat
            k := k + 1
          until ( k = n ) or ( D[k,k] <= 0 );
          if D[k,k] <= 0 then                       (* D ni PD    *)
            i := n
          else
            begin
              for k := i + 1 to n do
                begin
                  r := D[k,i]/D[i,i];
                  for j := i + 1 to n do
```

```
                        D[k,j] := D[k,j] - r*D[i,j]
                    end
                end;
              i := i + 1
            end;
          PD := ( i = n ) and ( D[n,n] > 0 )
        end
    end
  else
    n := -1
end;(*PD*)

begin
  writeln;
  writeln('              TEST POZITIVNE DEFINITNOSTI MATRIKE');
  writeln;
  writeln;
  write(' dimenzija matrike = ');
  readln( n );
  assign( f, 'PD.TST' );
  rewrite( f );
  for i := 1 to n do
    begin
      write( 'vrstica ', i:1, ' : ' );
      for j := 1 to n-1 do
        begin
          read( r );
          write( f, r, ' ' )
        end;
      readln(r);
      writeln( f, r )
    end;
  close( f );
  writeln;
  write(' Racunanje ...' );
  if PD( n, 'PD.TST' ) then
    writeln(chr(8),chr(8),chr(8),'uspesno koncano, matrika JE PD.')
  else
    if n = -1 then
      begin
        for i := 1 to 13 do
          write( chr(8) );
        write( 'Procedura PD je odkrila napako v podatkih!' )
      end
    else
      writeln(chr(8),chr(8),chr(8),'uspesno koncano, matrika NI PD.');
  readln
```

```
end.
```

Zbirka je, kot vidite, še vedno v surovem stanju, polna napak in pomanjkljivosti. Kljub temu avtorja upava, da Vam je v pomoč.

Avtorja bi Vam bila zelo hvaležna, če bi nama bili pripravljeni pomagati s svojimi pripombami in nasveti v zvezi z njo. Morda se Vam nekatere rešitve zdijo premalo podrobno opisane, druge pa so po nepotrebnem preveč obširne. Verjetno pogrešate naloge iz nekaterih področij, še posebej pa enostavnejše uvodne naloge k vsaki od tem. Vsekakor so vaše pripombe dobrodošle. Če se bo le dalo, jih bova upoštevala v naslednji, upava da že uradni izdaji zbirke.

Svoje pripombe lahko oddate osebno ali pri vratarju na Jadranski 19, lahko pa tudi po elektrovnski pošti na naslov
`Matjaz.Kaufman@Uni-Lj.Si`

Za Vaš trud se Vam vnaprej lepo zahvaljujeva.

V. Batagelj M. Kaufman

4. Kazalo

Kazalo