



WiseGorilla

Prosojnice

**Univerza v Ljubljani
FMF, matematika**

**Operacijske
raziskave
Projekti**

Vladimir Batagelj

Kazalo

1	Upravljanje s projektom	1
8	Metoda kritične poti	8
15	PERT – Program Evaluation and Review Technique	15
21	Metoda kritične poti s časovno-stroškovno analizo	21

Upravljanje s projektom

Upravljanje s projektom:

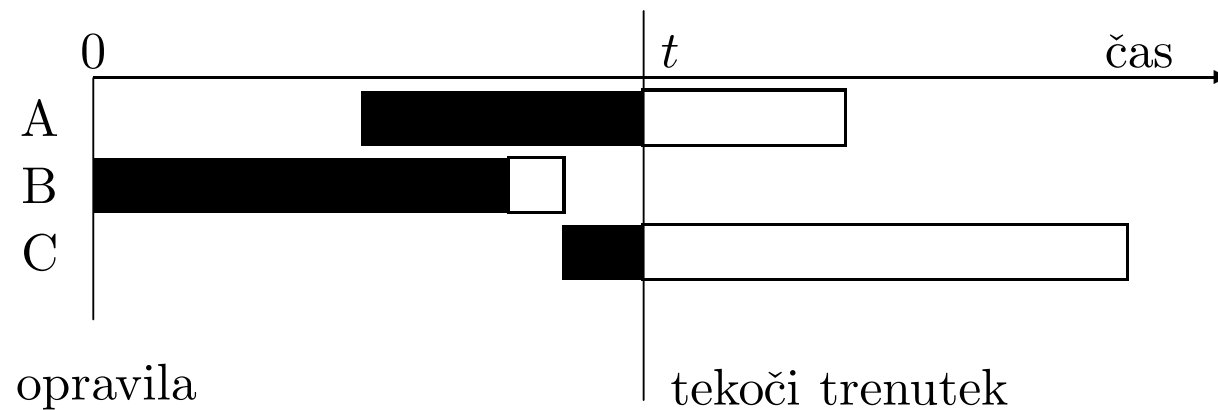
- načrtovanje;
- razporejanje;
- spremljanje.

Na voljo imamo različne *vire*: čas, denar, delovno silo, stroje, material, ... Cilj je čim učinkoviteje izvesti projekt. Običajno je najpomembnejši vir čas.

Projekt sestavlja množica med seboj bolj ali manj povezanih *opravil*. Prikažemo ga lahko na več načinov.

Ganttov diagram

Leta 1918 je Henry Gantt (1861-1919) vpeljal *Ganttov diagram*, ki slikovno prikazuje časovno razporeditev opravil. Ganttovi diagrami ne omogočajo nazornega prikaza odvisnosti med opravili; zelo primerni pa so za tekoče spremljanje odvijanja projekta.

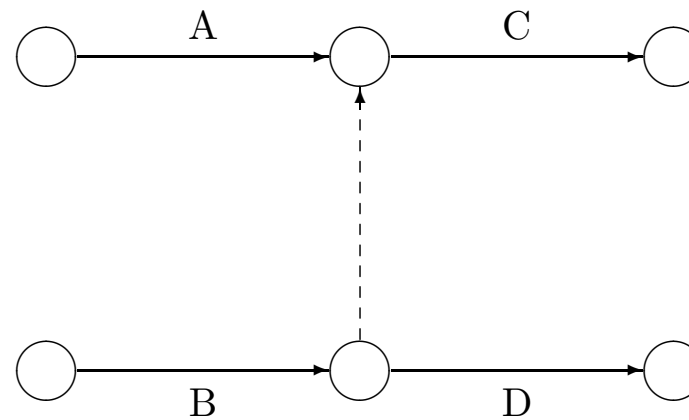
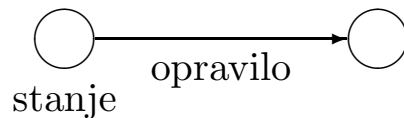


Projektna omrežja

Ustreznejša predstavitev projekta so grafovske predstavitve – *projektne omrežja* (mrežni diagrami). Obstajata dva pristopa

- opravila na povezavah (AOA – Activity On Arrow);
- opravila v točkah (AON – Activity On Node).

Mi bomo privzeli prvi pristop.



Pri izgradnji projektne omrežja bodo torej povezave predstavljale opravila, točke pa značilna stanja. Vsaki povezavi bomo pripisali še čas trajanja.

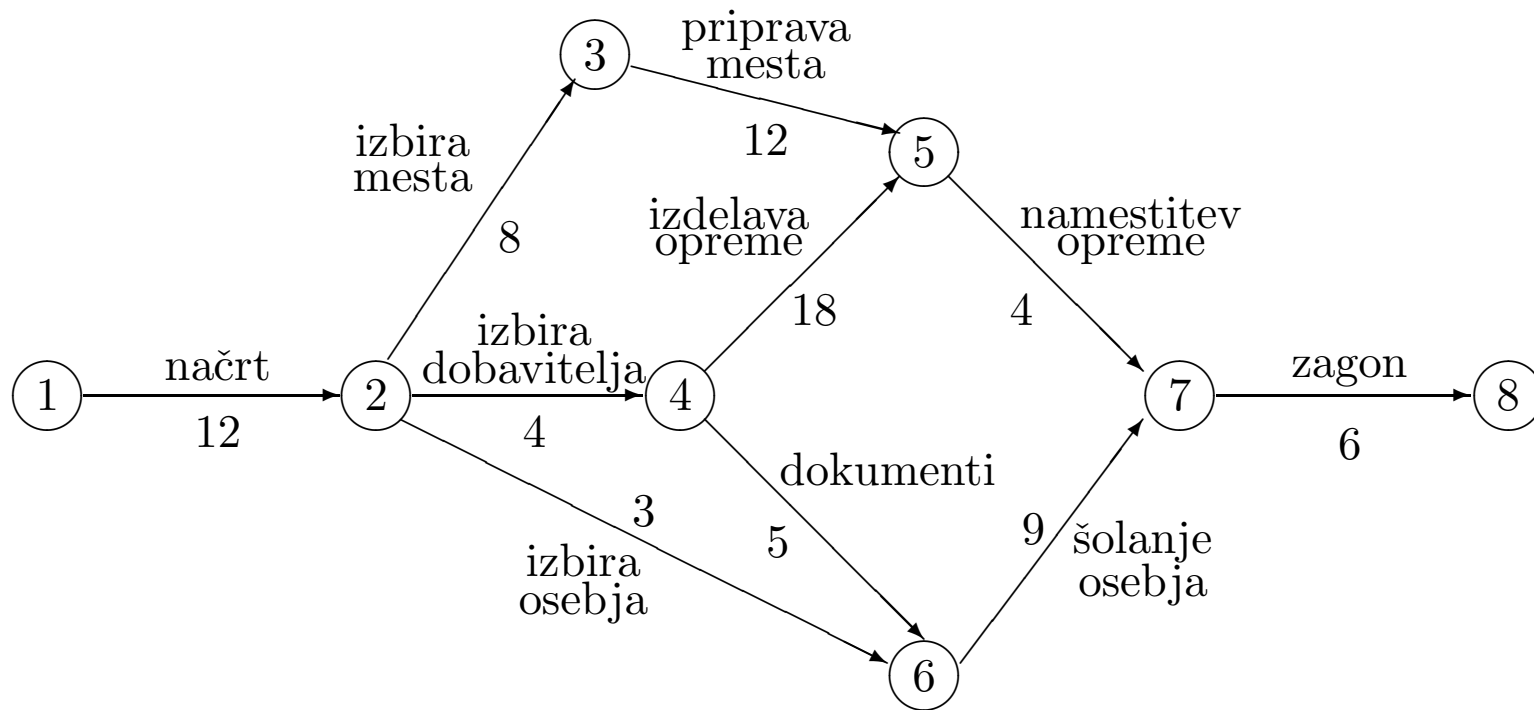
...Projektna omrežja

Poleg tega zahtevamo:

- omrežje je aciklično in ima en izvor in en ponor. Vsaka točka leži na neki poti od izvora do ponora.
- točke so pravilno oštevilčene – številka začetka vsake povezave je manjša od številke njenega konca.
- par točk povezuje največ ena povezava – po potrebi uvedemo navidezne povezave s trajanjem 0.

Primer projektnega omrežja, ki opisuje izgradnjo toplarne je prikazan na sliki.

Projektno omrežje izgradnje toplarne



Projektno omrežje izgradnje toplarne

Projekt lahko enakovredno opišemo tudi s *tabelo opravil*.

oznaka	zacetek	konec	cas
načrt	1	2	12
mesto	2	3	8
oprema	2	4	4
osebje	2	6	3
zidava	3	5	12
izdelava	4	5	18
dokumenti	4	6	5
namestitev	5	7	4
šolanje	6	7	9
zagon	7	8	6

...Projektna omrežja

Pri obsežnih (več tisoč opravil) projektih morajo orodja za analizo projekta omogočati hierarhijo pravil.

Projektno omrežje je tudi del dokumentacije projekta.

Za analizo projektних omrežij sta se uveljavili predvsem metodi CPM in PERT, ki omogočata razporejanje in nadzor poteka velikih projektov. Njuno matematično ozadje je razmeroma preprosto in ponujata vrsto nazornih predstavitev zgradbe in stanja projekta.

Metoda kritične poti

Leta 1957 sta J.E. Kelly iz Remington Rand M.R. Walker iz du Pont Corporation razvila *metodo kritične poti* (CPM – Critical Path Method), ki omogoča določitev najkrajšega časa trajanja projekta.

Kritična pot je najdaljša pot v projektne omrežju – v krajšem času projekta ni mogoče izvesti.

V našem primeru je število poti majhno in lahko kritično pot določimo s preborom vseh poti:

$$T(1, 2, 3, 5, 7, 8) = 12 + 8 + 12 + 4 + 6 = 42$$

$$T(1, 2, 4, 5, 7, 8) = 12 + 4 + 18 + 4 + 6 = 44$$

$$T(1, 2, 4, 6, 7, 8) = 12 + 4 + 5 + 9 + 6 = 36$$

$$T(1, 2, 6, 7, 8) = 12 + 3 + 9 + 6 = 30$$

Kritična pot $\pi^* = (1, 2, 4, 5, 7, 8)$, $T(\pi^*) = 44$.

...Metoda kritične poti

Za analizo večjih projektih omrežij pa se moramo zateči k uporabi postopkov. Postopek kritične poti sestavi tabelo stanj, v kateri za vsako stanje S določi tri količine

- zarok* – kdaj najprej lahko začnemo
- korok* – kdaj najkasneje moramo končati
- prednik* – na kritični poti

Postopek opravi dva prehoda skozi omrežje. V prvem, *prem* prehodu določi kritično pot (prednike) in *zaroke*. V drugem, *obratnem* prehodu pa, glede na kritično pot, določi še *koroke*.

...Metoda kritične poti – premi prehod

```
postavi izvor v seznam;  
S(izvor).zarok := 0;  
while seznam ni prazen do  
    vzemi tocko iz seznama;  
    for all opravilo = (zacetek, konec, cas) : zacetek = tocka do  
        max := S(zacetek).zarok + cas  
        if S(konec).zarok < max then  
            S(konec).zarok := max; S(konec).prednik := zacetek  
        endif;  
    if vsa opravila, ki vodijo v konec, so obdelana then  
        postavi konec na konec seznama  
    endif;  
endfor;  
endwhile;
```

...Metoda kritične poti – obratni prehod

postavi *ponor* v seznam;

$S(\textit{ponor}).\textit{korok} := S(\textit{ponor}).\textit{zarok}$;

while seznam ni prazen **do**

 vzemi točko iz seznama;

for all opravilo = (*zacetek*, *konec*, *cas*) : *konec* = točka **do**

$\textit{min} := S(\textit{konec}).\textit{korok} - \textit{cas}$

if $S(\textit{zacetek}).\textit{korok} > \textit{min}$ **then**

$S(\textit{zacetek}).\textit{korok} := \textit{min}$;

endif;

if vsa opravila, ki imajo ta *zacetek*, so obdelana **then**

 postavi *zacetek* na konec seznama

endif;

endfor;

endwhile;

...Metoda kritične poti – Tabela stanj

V tabeli je prikazana sled izračuna *tabele stanj*. Končne vrednosti količin so zapisane krepko.

#	zarok	korok	prednik
1	0	0	
2	12	26, 12	1
3	20	22	2
4	16	24, 16	2
5	34	34	4
6	15, 21	29	2, 4
7	30, 38	38	6, 5
8	44	44	7

...Metoda kritične poti – izpeljane količine

Iz izračunanih količin v tabeli stanj lahko za vsako opravilo izračunamo nekaj značilnih *izpeljanih količin*

$$RokZa.min = S(zacetek).zarok$$

$$RokZa.max = S(konec).korok - cas$$

$$RokKo.min = S(zacetek).zarok + cas$$

$$RokKo.max = S(konec).korok$$

$$Razpo.cel = S(konec).korok - S(zacetek).zarok - cas$$

$$Razpo.pro = S(konec).zarok - S(zacetek).zarok - cas$$

s katerimi dopolnimo tabelo opravil.

...Metoda kritične poti – Dopolnjena tabela opravil

oznaka	podatki			začetek		konec		prosto	
	zac	kon	cas	min	max	min	max	cel	pro
načrt	1	2	12	0	0	12	12	0	0
mesto	2	3	8	12	14	20	22	2	0
oprema	2	4	4	12	12	16	16	0	0
osebje	2	6	3	12	26	15	29	14	6
zidava	3	5	12	20	22	32	34	2	2
izdelava	4	5	18	16	16	34	34	0	0
dokumenti	4	6	5	16	24	21	29	8	0
namestitev	5	7	4	34	34	38	38	0	0
šolanje	6	7	9	21	29	30	38	8	8
zagon	7	8	6	38	38	44	44	0	0

Kot vidimo, lahko nekatera opravila še nekoliko premikamo znotraj pripadajočega intervala. To lahko izkoristimo pri glajenju trenutnih potreb po posameznih virih.

PERT – Program Evaluation and Review Technique

Metoda PERT je izboljšava metode kritične poti. Razvili so jo leta 1958 Booz, Allen in Hamilton, zunanji sodelavci Navy Special Projects Officea, pri pripravi projekta za razvoj rakete Polaris. Baje gre prav tej metodi zasluga, da je bil projekt končan skoraj dve leti prej, kot je bilo zahtevano.

Pri metodi kritične poti predpostavljamo, da je trajanje posameznega opravila natančno poznano. Pri metodi PERT pa trajanje opravila obravnavamo kot slučajno spremenljivko z znano porazdelitvijo.

...PERT – porazdelitev beta

Običajno privzamemo, da ima trajanje opravila porazdelitev beta. Zato moramo za vsako opravilo podati ocene treh količin:

a - optimistični čas trajanja: čas trajanja pri najugodnejših pogojih;

m - najverjetnejši čas trajanja;

b - pesimistični čas trajanja: čas trajanja pri najneugodnejših pogojih;

Pokazati je mogoče, da je pričakovana vrednost trajanja opravila T približno enaka

$$E(T) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

njena varianca pa

$$\sigma^2 = DT = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

...PERT – porazdelitev beta

PERT nadalje predpostavlja, da so trajanja opravil neodvisne spremenljivke.

Tedaj velja za vsako pot $\pi = (p_i)_{i=1}^n$ po omrežju

$$\mathbf{E}(T(\pi)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(T(p_i)) \quad \text{in} \quad \mathbf{D}(T(\pi)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}(T(p_i))$$

Po centralnem limitnem izreku je za nekoliko večja omrežja slučajna spremenljivka T_C , ki meri skupno trajanje opravil na kritični poti π^*

$$T_C = \sum_{p \in \pi^*} T(p)$$

normalno porazdeljena.

PERT – Tabela opravil za metodo PERT

Na osnovi povedanega pri metodi PERT problem prevedemo na metodo kritične poti, ki jo uporabimo na pričakovanih trajanjih opravil $E(T)$. Poleg tega lahko ocenimo tudi varianco kritične poti.

oznaka	zacetek	konec	a	m	b	E	σ^2
načrt	1	2	10	12	16	12.33	1
mesto	2	3	2	8	36	11.67	32.11
oprema	2	4	1	4	5	3.67	0.44
osebje	2	6	2	3	4	3	0.11
zidava	3	5	8	12	20	12.67	4
izdelava	4	5	15	18	30	19.5	6.25
dokumenti	4	6	3	5	8	5.17	0.69
namestitev	5	7	2	4	8	4.33	1
šolanje	6	7	6	9	12	9	1
zagon	7	8	4	6	14	7	2.78

PERT – kritična pot

Po metodi kritične poti dobimo kritično pot

$$\pi^* = (1, 2, 3, 5, 7, 8)$$

in oceni

$$E(T_C) = 12.33 + 11.67 + 12.67 + 4.33 + 7 = 48.00$$

$$\sigma^2(T_C) = 1 + 32.11 + 4 + 1 + 2.78 = 40.89$$

oziroma $\sigma(T_C) = 6.39$.

Ker znamo oceniti pričakovano trajanje projekta in njegov standardni odklon, in ker lahko privzamemo, da je trajanje projekta normalno porazdeljeno, lahko tudi ocenimo verjetnosti posameznih hipotez o trajanju projekta.

PERT – statistične ocene

Na primer, za to da bi ocenili verjetnost, da bo trajanje projekta prekoračilo čas T_0 , vpeljemo standardizirano spremenljivko $Z = \frac{T - \mathbf{E}(T_C)}{\sigma}$. Tedaj je

$$P(T_C \geq T_0) = 1 - \Phi\left(\frac{T_0 - \mathbf{E}(T_C)}{\sigma}\right)$$

Podobno je verjetnost, da bo projekt zaključen prej kot v času T_0

$$P(T_C \leq T_0) = \Phi\left(\frac{T_0 - \mathbf{E}(T_C)}{\sigma}\right)$$

Za naš zgled dobimo:

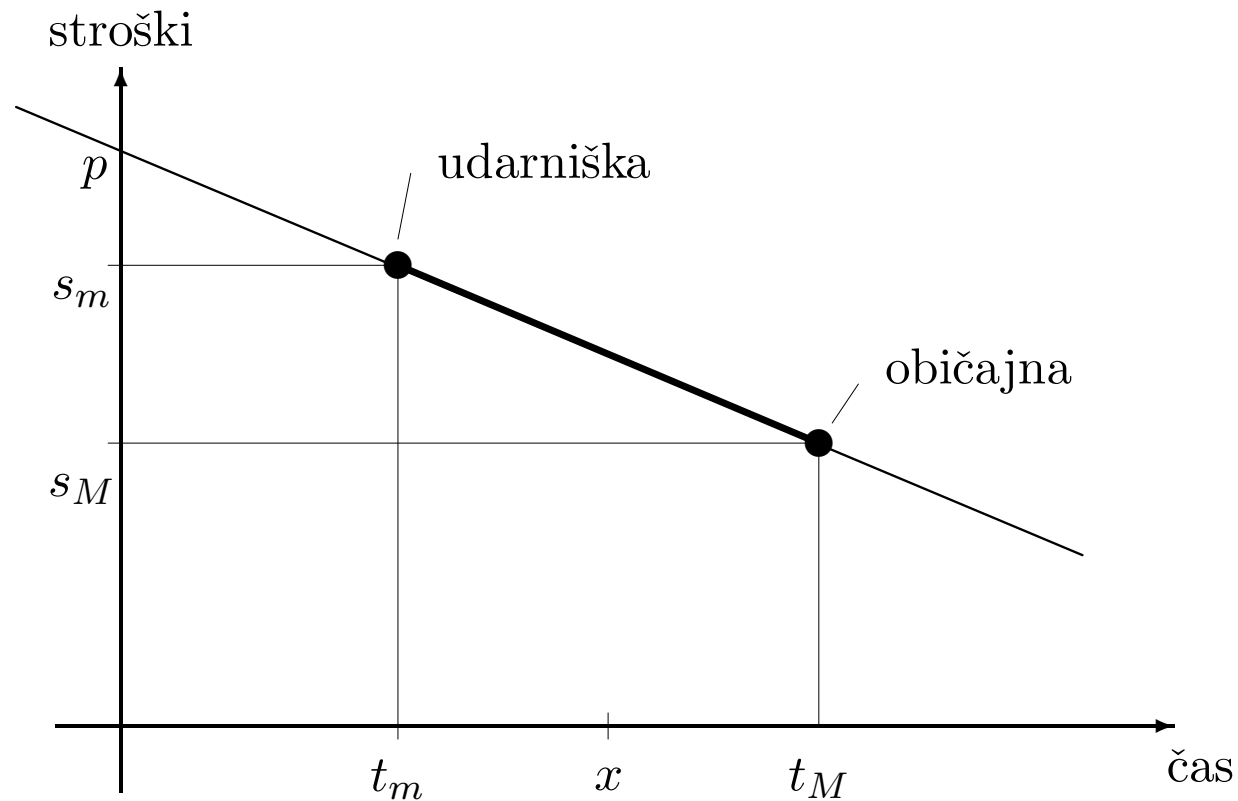
$$\text{a. } P(T_C \geq 54) = 1 - \Phi\left(\frac{54 - 48}{6.39}\right) = 1 - \Phi(0.93) = 1 - 0.82 = 0.18$$

$$\text{b. } P(T_C \leq 45) = \Phi\left(\frac{45 - 48}{6.39}\right) = \Phi(-0.46) = 0.32$$

Metoda kritične poti s časovno-stroškovno analizo

Vsakemu opravilu priredimo časovno-stroškovno krivuljo – daljico, ki povezuje (neposredne) stroške pri običajnem izvajanju opravila na eni strani in stroške pri ‘udarniškem’ izvajanju opravila, ko si prizadevamo stvar opraviti čim hitreje, ne glede na stroške.

Časovno-stroškovna krivulja



Krivulja določa še dve količini: *naklon* $q = \frac{s_M - s_m}{t_M - t_m}$ in *presečišče* p z ordinatno osjo. Dejansko trajanje opravila opisuje spremenljivka x , $t_m \leq x \leq t_M$.

Stroški

Torej so dejanski neposredni stroški opravila $(i, j) \in A$

$$s_{ij} = p_{ij} + q_{ij} \cdot x_{ij}$$

in neposredni stroški projekta

$$S(X) = \sum_{(i,j) \in A} s_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} p_{ij} + q_{ij} \cdot x_{ij}$$

Prizadevamo si, da bi dani projekt izvedli čim ceneje v izbranem (predpisanem, dogovorjenem) roku T .

Zato vpeljimo v vsaki točki k še spremenljivko $y_k \geq 0$, ki predstavlja najzgodnejši začetek opravil z začetkom v točki k .

Stroški

Torej mora y_k zadoščati pogoju

$$y_k = \max_{(i,k) \in A} \{y_i + x_{ik}\}$$

kar je enakovredno sistemu neenakosti

$$y_i + x_{ik} \leq y_k, \quad (i, k) \in A$$

Poleg tega je $y_1 = 0$ in $y_n \leq T$.

Ker je $\sum_{(i,j) \in A} p_{ij}$ konstanta, neodvisna od X in Y , lahko ta člen izpustimo iz kriterijske funkcije.

Projekti in linearno programiranje

Tako dobimo nalogo linearnega programiranja $LP = (\Phi, S', \min)$, kjer je

$$S'(X, Y) = \sum_{(i,j) \in A} q_{ij} \cdot x_{ij}$$

in je množica dopustnih rešitev Φ določena s pogoji:

$$y_i + x_{ik} \leq y_k, \quad (i, k) \in A$$

$$t_m(i, j) \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A$$

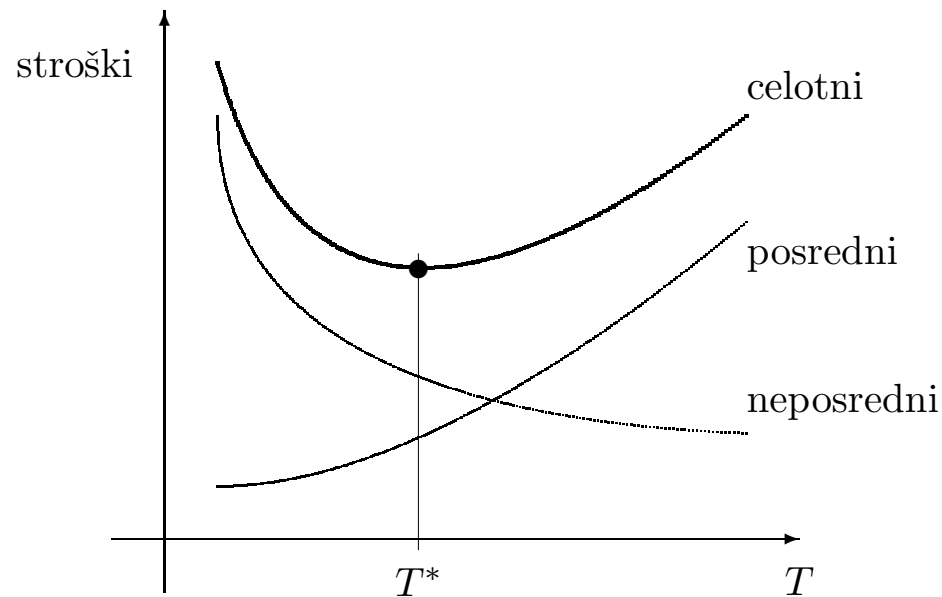
$$x_{ij} \leq t_M(i, j) \quad (i, j) \in A$$

$$y_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$$

$$y_1 = 0$$

$$y_n \leq T$$

Celotni stroški



Kadar lahko sami določamo rok izvedbe projekta T , izbiramo naslonimo na celotne (posredne in neposredne) stroške projekta.

Pri določanju ocen trajanja posameznih opravil se pogosto pojavijo subjektivne napake, ki izvirajo iz 'strahu'. Zato je, če je le mogoče, zaželeno ocene opraviti na osnovi 'zgodovine'.

Včasih pri nadziranju projekta posvečamo premalo pozornosti nekritičnim potem, ki nas tudi lahko presenetijo.

Druge različice

PERT-SIM je kombinacija metode PERT in metode Monte Carlo. Glede na dane porazdelitve sestavimo slučajno omrežje in ga analiziramo. To velikokrat ponovimo. Rezultat je porazdelitev trajanja projekta in druge porazdelitve – na primer, verjetnosti, da posamezna povezava leži na kritični poti.

GERT: opravila se izvedejo le z določeno verjetnostjo, dovoljeni so cikli.

CPM/MRP: (Material Requirements Planning) omogoča tudi razporejanje materiala.

Programi za opisane metode praviloma vsebujejo koledarske možnosti – upoštevamo le delovne dni. Izdelajo vrsto poročil.